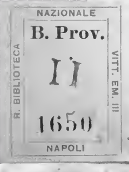

VITTORIO EM



30-A-32

14007
BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
30-A-32
Num.° d' ordine



B. Prov.
II
1650

Digitized by Google

Digitized by Google

LES

VRAIS PRINCIPES

DES CALCULS

DIFFÉRENTIEL, INTÉGRAL ET DES VARIATIONS.

Google

Imprimerie de J. Stienon.

Digitized by Google

SBN 610889

LES

VRAIS PRINCIPES

DES CALCULS

DIFFÉRENTIEL, INTÉGRAL ET DES VARIATIONS,

DONNANT LA SOLUTION DE TOUTE ESPÈCE DE PROBLÈME

SANS LE SECOURS DES INFINIMENT PETITS,

PAR

F. J. GILAIN,

CANDIDAT EN SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES,
DE L'UNIVERSITÉ DE BRUXELLES.





BRUXELLES.
SOCIÉTÉ TYPOGRAPHIQUE BELGE,
ADOLPHE WAHLEN ET CIE

1845

Digitized by Google

INTRODUCTION.

Avant d'entrer en matière, je crois utile d'émettre quelques idées introductives au travail que je soumets aujourd'hui à l'appréciation du monde savant. Je n'ai pas eu la prétention de faire une œuvre littéraire, je réclame donc pour la forme de cet ouvrage autant d'indulgence que je désire de sévérité pour le fond. J'entends cette sévérité intelligente qui n'a en vue que la connaissance de la vérité.

Je ne décrirai pas l'impression pénible que fit sur mon esprit l'exposé des principes du calcul différentiel; car, que pourrais-je dire que n'aient ressenti aussi vivement, plus vivement encore peut-être, tous ceux qui ont abordé l'étude de ce calcul? Quel est, en effet, l'esprit qui n'ait éprouvé une répugnance presque invincible à admettre le principe des

Digitized by Google

infiniment petits? Quel est l'homme qui ait jamais pu se figurer une quantité de cette nature, c'est-à-dire une quantité qui, sans être nulle, n'en a aucune qui lui soit inférieure? Non, jamais personne n'a pu comprendre de pareilles absurdités. Après cela m'étendrai-je sur toutes les hypothèses insolites qui ont été faites à cet égard? D'ailleurs, que pourrais-je exposer qui n'ait été démontré avec beaucoup plus de talent que je ne saurais le faire? Je n'ajoute qu'un seul mot : j'ai toujours eu la conviction que, tout en partant de bases fausses, les mathématiciens raisonnaient, à leur insu, d'après des principes vrais, dont la découverte devint l'objet principal de mes recherches.

Si quelques-uns s'étonnaient de voir des principes faux conduire à des résultats exacts, qu'ils songent que les principales propriétés démontrées par le calcul différentiel étaient connues avant l'algorithme par lequel on veut les expliquer. Qu'ils se rappellent que deux théories se disputèrent d'abord la prééminence, et que, comme cela n'arrive que trop souvent, la plus rationnelle fut rejetée. En d'autres termes, la théorie des fluxions de Newton échoua devant celle des infiniment petits établie par Leibnitz.

Cette dernière ne fut cependant pas admise sans discussion; celle-ci fut même très-vive, mais la logique dut enfin céder devant les résultats. Cela n'empêcha cependant pas l'illustre Lagrange de tenter un digne et noble effort en exposant sa théorie des limites. Malheureusement elle ne satisfit pas aux justes exigeances de l'esprit humain; car, si le procédé était rationnel, la conclusion n'était rien moins qu'admissible.

J'avais été surpris de voir les sciences réputées exactes admettre des principes aussi éminemment faux que ceux du calcul différentiel; mais comment exprimer l'étonnement que me fit éprouver l'étude du calcul des variations? Là, non-seulement je ne rencontrai pas de principes vrais, mais je n'en trouvai pas du tout, car on ne peut appeler de ce nom les quelques règles pratiques sur lesquelles on s'appuie, et qui n'ont elles-mêmes aucune base rationnelle. Ainsi à une impression pénible en succédait une plus pénible encore : d'un côté des principes faux, de l'autre absence complète de principes. Il faut l'avouer, il y avait de quoi rebuter les mieux intentionnés.

Je fis sur le calcul des variations les recherches que j'avais faites sur le calcul différentiel. Dans ces recherches je fus surtout frappé de la portée de l'une des règles dont je viens de parler; voici comment elle était conçue : *Pour obtenir la variation d'une fonction, il faut la différentier sous le signe* δ. Ces quelques mots furent un véritable trait de lumière pour moi; j'en concluai nécessairement que le calcul différentiel et celui des variations étaient régis par un seul et même principe. Ce principe commun je le cherchai naturellement dans le calcul le plus général et le plus complet, celui des variations. J'étais sous l'empire de cette idée quand le savant professeur M. Meyer, m'exposa un artifice qui, quoique destiné à une autre fin, vint tout à coup combler mes vœux en me conduisant à la découverte du principe que je poursuivais si ardemment.

J'aurais pu attendre, avant de publier ce travail,

que j'en eusse fait des applications plus étendues; mais j'ai pensé qu'il y aurait de l'égoïsme à laisser ainsi les progrès de la science à la merci d'un seul cerveau. Mon but est donc, en publiant cet ouvrage, d'engager les amis de la science à contribuer, par leur part de travail, à une réforme scientifique devenue si nécessaire.

Digitized by Google

PRINCIPES

DU

CALCUL DES VARIATIONS.



1. Plus d'un lecteur s'attend à rencontrer ici une définition rigoureuse du calcul des variations. Malheureusement j'en suis à peu près réduit, sur ce point, à la position de ceux qui ont voulu définir le calcul différentiel. La seule bonne définition que l'on puisse en donner, c'est l'exposé du calcul lui-même. Je trouve, d'ailleurs, que l'on attache souvent trop d'importance à bien définir une science. Cette importance est d'autant plus mal fondée qu'il faut ordinairement connaître la science pour en comprendre la définition.

Ce qui m'arrête surtout dans la définition du calcul qui va nous occuper, c'est sa division en plusieurs parties qui ont chacune un cachet particulier et dont il serait très-difficile de faire un assemblage homogène. La crainte de n'être pas compris m'oblige donc à garder une grande réserve sur ce point; on comprendra le motif de cette réserve lorsque l'on connaîtra l'exposé des faits tels que nous allons l'établir. Disons cependant qu'en général le calcul des variations est un moyen méthodique d'abaisser le degré des fonctions afin de rendre sensibles certaines propriétés qu'il serait impossible de découvrir par l'examen de cette fonction dans son état normal. Dans

certaines applications, on profite de l'indétermination de quantités, introduites par le procédé de variation, pour remplir les conditions d'un problème.

La théorie du calcul des variations n'est aucunement en désaccord avec la théorie des fluxions établie par Newton, ni avec la théorie de Leibnitz, en tant qu'elle s'accorde avec la première. Elle prouve au contraire cette théorie des fluxions et en donne une explication claire et précise. Il semble, qu'ici comme toujours, il a suffi au génie sublime de Newton d'avoir prévu cette loi, pour qu'elle soit aussi immuable que la science dont elle fait partie.

Je ne sais comment ce savant mathématicien est parvenu au résultat dont il s'agit; mais je pense que s'il eût été moins scrupuleux, et s'il eût basé sa théorie sur un principe quelconque, vrai ou faux, elle l'eût peut-être emporté sur celle de Leibnitz. Ceci soit dit sans vouloir, en aucune manière, contester les immenses services rendus à la science par la théorie de ce dernier savant. Mais je crois que si l'on se fût occupé davantage de la théorie des fluxions, elle aurait conduit à des résultats au moins aussi satisfaisants que la théorie des infiniment petits.

La théorie générale des fonctions ayant été traitée avec beaucoup de talent par une foule de mathématiciens distingués, je ne me hasarderai pas à la traiter après eux. Je commencerai donc immédiatement l'exposé du calcul des variations.

2. Soit la fonction quelconque :

$$y = \varphi(x)$$

Si nous donnons à x un accroissement Δx la fonction recevra un accroissement correspondant que nous représenterons par Δy; l'égalité $y = \varphi(x)$ devient alors

$$y + \Delta y = \varphi(x + \Delta x) \qquad (1)$$

Digitized by Google

Ce début est le même que celui de la méthode de Lagrange, mais nous allons nous en écarter, en posant

$$\Delta x = f(x, i)$$

et en supposant cette fonction d'une nature telle que l'on ait

$$\Big[f(x, i)\Big]_{i=0} = f(x, 0) = 0$$

Δy devant s'annuler quand $\Delta x = 0$; on devra avoir d'une manière identique

$$\Delta y = \mathrm{F}(y, i) \text{ en même temps que } \mathrm{F}(y, 0) = 0.$$

Ainsi, pour nous résumer, nous regardons Δy et Δx comme des fonctions quelconques de y, de x et de i, qui s'annulent quand $i = 0$ et qui satisfont à l'équation (1). Nous ne considérons plus Δx et Δy comme s'annulant d'une manière absolue, mais bien comme s'annulant en vertu de la présence d'une variable i commune à ces deux fonctions, lorsque cette variable i devient elle-même égale à zéro.

Si des deux membres de l'équation (1) nous retranchons y ou son équivalent $\phi(x)$ elle devient :

$$\Delta y = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) \qquad (2)$$

Le premier membre de cette équation devient zéro quand $i = 0$, il faut donc que le second membre s'annule pour la même valeur de i. Or, dans ce second membre nous trouvons la fonction :

$$\varphi(x + \Delta x)$$

dont il faut retrancher $\varphi(x)$. Mais

$$\varphi(x + \Delta x)$$

se partage naturellement en deux parties, l'une contenant les termes indépendants de Δx, l'autre les termes multipliés par une certaine puissance de Δx ; quand $\Delta x = 0$ cette seconde



partie s'annule, tandis que la première reste intacte. Il faut donc que l'on ait

$$\varphi(x + \Delta x) = \varphi(x) + \Psi(x, \Delta x). \Delta x;$$

puisque le second membre de l'équation (2) doit s'annuler quand $\Delta y = 0$, et par conséquent $\Delta x = 0$, on voit donc que l'égalité (2) devient

$$\Delta y = \Psi(x, \Delta x). \Delta x \qquad (3)$$

Mais en général $\Psi(x, \Delta x)$ se composera de termes indépendants de Δx, dont nous représentons l'ensemble par $\varphi'(x)$, et de termes multipliés au moins par la première puissance de Δx. Nous pourrons donc poser

$$\Psi(x, \Delta x) = \varphi'(x) + \varphi_1(x, \Delta x). \Delta x.$$

Ainsi l'équation (3) pourra s'écrire :

$$\Delta y = \varphi'(x). \Delta x + \varphi_1(x, \Delta x). \Delta x^2 \qquad (4)$$

En divisant les deux membres par Δx, il vient :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi'(x) + \varphi_1(x, \Delta x). \Delta x \qquad (5)$$

Avant de faire subir aucune transformation ultérieure à cette égalité, nous devrons nous occuper de la démonstration d'un lemme, qui peut s'énoncer en ces termes : Il existe toujours entre Δy et Δx un facteur commun en i, qui s'annule quand $i = 0$; et tel qu'en le supprimant dans Δy et Δx, ces fonctions cessent de s'annuler pour $i = 0$.

Je crois inutile de faire remarquer que le premier membre de (4) est en quelque sorte l'identique du second, toutes les phases que subira ce premier membre, le second devra les subir de même, et réciproquement. L'identité serait parfaite si au lieu de y nous mettions partout $\varphi(x)$, dans le premier membre.

Digitized by Google

Puisque $f(x, i) = 0$ quand $i = 0$, il faut que tous les termes en x de cette fonction s'annulent séparément, pour cette valeur de i. Il faut donc aussi qu'ils soient tous multipliés par un facteur en i qui s'annule quand $i = 0$. Or, pour que ces facteurs ou coëfficients en i s'annulent quand $i = 0$, il faut que chaçun des termes de ces coëfficients soit multiple d'une certaine puissance positive de i. Si nous divisons tous ces termes de Δx par la plus petite de ces puissances, il est clair que l'un au moins des coëfficients de x, dans la fonction $f(x, i)$, cessera de s'annuler quand $i = 0$. D'où il suit que Δx divisé par cette plus petite puissance de i, prendra une valeur finie pour $i = 0$. Or, si l'on divise toute l'équation (4) par cette même puissance de i, nous voyons que le second membre de cette égalité prend une valeur finie pour $i = 0$. Il devra donc en être de même du premier membre de cette équation, c'est-à-dire, qu'il faut que Δy soit divisible par cette puissance de i, et qu'une fois cette division effectuée, cette fonction cesse de s'annuler quand $i = 0$.

Il existe donc toujours entre Δx et Δy, un facteur commun en i qui s'annule en même temps que i; en outre, si nous divisons les fonctions Δy et Δx par ce facteur commun, elles cessent de s'annuler quand $i = 0$.

Pour prévenir toute objection, disons que tout ce qui précède ne s'applique qu'aux fonctions $\varphi(x + \Delta x)$, qui peuvent se développer suivant les puissances entières et ascendantes de Δx. Cette restriction n'ôte rien à la généralité de la théorie, puisque toutes les fonctions, que l'on considère en mathématique, jouissent de cette propriété.

Cela posé, reprenons l'équation (5)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi'(x) + \varphi_{,}(x, \Delta x). \Delta x.$$

et supprimons le facteur commun aux deux termes du rapport

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$; représentant par $\Delta' y$ et $\Delta' x$, ce que deviennent alors Δy et Δx, on trouve :

$$\frac{\Delta' y}{\Delta' x} = \varphi'(x) + \varphi_{,}(x, \Delta x).\, \Delta x \qquad (6)$$

d'où, en faisant $i = 0$, et représentant respectivement par δy et δx, ce que deviennent $\Delta' y$ et $\Delta' x$, pour cette valeur de i, on déduit l'équation finale

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \varphi'(x). \qquad [1].$$

C'est cette valeur constante du rapport des deux fonctions δy et δx, que nous nommerons dérivée de la fonction $\varphi(x)$. Cette dérivée, que Newton désigne sous le nom de fluxion et Leibnitz sous celui de coëfficient différentiel, jouit d'une foule de propriétés remarquables, dont nous nous occuperons ci-après.

Si nous multiplions les deux membres de [1] par δx, on obtient :

$$\delta y = \delta.\, \varphi(x) = \varphi'(x).\, \delta x. \qquad [2]$$

$\varphi'(x)\, \delta x$ est ce que nous désignerons par la suite sous le nom de variation de la fonction $\varphi(x)$. La variation d'une fonction d'une variable est donc égale à la dérivée de cette fonction, multipliée par la variation ou le δ de la variable par rapport à laquelle on la varie.

3. Pour bien faire comprendre l'esprit de la méthode que nous venons d'employer, nous l'appliquerons à quelques exemples bien simples, en raisonnant sur la fonction particulière $y = x^2$.

Nous avons en général

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x.\, \Delta x + \overline{\Delta x}^2,$$

d'où

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x,$$

ou

$$\frac{\Delta' y}{\Delta' x} = 2x + \Delta x,$$

d'où enfin

$$\left(\frac{\Delta' y}{\Delta' x}\right)_0 = 2x.$$

Il s'agit de démontrer que pour toutes les valeurs de Δx rentrant sous le type déterminé au § 2, le rapport $\left(\frac{\Delta' y}{\Delta' x}\right)_0$ prend toujours la valeur $2x$.

1° Soit

$$\Delta x = \frac{i}{x},$$

on trouve pour ce cas

$$\Delta y = 2i + \frac{i^2}{y}.$$

d'où

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2i + \frac{i^2}{y}}{\frac{i}{x}} = \frac{2 + \frac{i}{y}}{\frac{1}{x}}$$

donc

$$\left(\frac{\Delta' y}{\Delta' x}\right)_0 = \left(\frac{2 + \frac{i}{y}}{\frac{1}{x}}\right)_0 = \frac{2}{\frac{1}{x}} = 2x$$

2° Soit

$$\Delta x = i\,(1 + x)$$

d'où

$$\Delta y = y\,(2i + i^2) + \sqrt{y}\,(2i + 2i^2) + i^2$$

et

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y\,(2i + i^2) + \sqrt{y}\,(2i + 2i^2) + i^2}{i\,(1 + x)}$$

$$\frac{\Delta' y}{\Delta' x} = \frac{y\,(2 + i) + \sqrt{y}\,(2 + 2i) + i}{1 + x}$$

d'où

$$\left(\frac{\Delta' y}{\Delta' x}\right)_0 = \frac{2y + 2\sqrt{y}}{1 + x} = \frac{2\,(y + \sqrt{y})}{1 + x}.$$

Mais

$$y = x^2,$$

donc

$$\left(\frac{\Delta' y}{\Delta' x}\right)_0 = \frac{2\,(x^2 + x)}{1 + x} = \frac{2\,(1 + x)\,x}{1 + x} = 2x.$$

3° Supposons

$$\Delta x = \log\,(1 + i)$$

d'où

$$\Delta y = 2\sqrt{y}\,\lg\,(1 + i) + \lg^2\,(1 + i)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sqrt{y}\,\lg\,(1 + i) + \lg^2\,(1 + i)}{\lg\,(1 + i)} = \frac{2\sqrt{y} + \lg\,(1 + i)}{1}$$

d'où

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_0 = \frac{2\sqrt{y}}{1} = 2\sqrt{y} = 2x.$$

4° Soit enfin

$$\Delta x = \lg\left(1 + \frac{i}{x}\right),$$

d'où

$$\Delta y = 2\sqrt{y}\,\lg\left(1 + \frac{i}{\sqrt{y}}\right) + \lg^2\left(1 + \frac{i}{\sqrt{y}}\right)$$

on a ainsi

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sqrt{y}\,\lg\left(1 + \frac{i}{\sqrt{y}}\right) + \lg^2\left(1 + \frac{i}{\sqrt{y}}\right)}{\lg\left(1 + \frac{i}{x}\right)} =$$

$$\frac{2\sqrt{y}\left[\frac{i}{\sqrt{y}} - \frac{1}{2}\frac{i^2}{y} + \frac{1}{3}\frac{i^3}{y\sqrt{y}}\right] + \lg\left(1 + \frac{i}{\sqrt{y}}\right)\left[\frac{i}{\sqrt{y}} - \frac{i^2}{2y} + \ldots\right]}{\frac{i}{x} - \frac{i^2}{2x^2} + \frac{i^3}{3x^3}\ldots}$$

$$= \frac{2\sqrt{y}\left[\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{2}\frac{i}{y}\ldots\right] + \lg\left(1 + \frac{i}{\sqrt{y}}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{2}\frac{i}{y} + \ldots\right]}{\frac{1}{x} - \frac{i}{2x^2} + \frac{i^2}{3x^3}\ldots}$$

d'où

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_0 = \frac{2\sqrt{y}\,\frac{1}{\sqrt{y}}}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{1}{x}} = 2x.$$

4. Il importe de remarquer, avant d'aller plus loin, que δy et δx n'indiquent pas des accroissements correspondants, l'un de y et l'autre de x. Malgré toutes mes recherches, je n'ai pas encore pu déterminer la nature intime de l'opération marquée par le signe δ.

Cependant, comme nous le verrons plus loin, les fonctions δy et δx jouissent d'une propriété fort remarquable lorsque l'on considère $y = \varphi(x)$ comme l'équation d'une courbe plane. Mais cette propriété particulière ne suffit pas pour nous donner une idée précise de la nature générale du signe δ. Dans le calcul différentiel on considère dy comme l'accroissement que reçoit y quand x reçoit l'accroissement dx. Cette supposition erronnée est la source de toutes les erreurs dans lesquelles on est tombé sur la signification de ce calcul. Il importe au plus haut point, de voir cette idée déracinée de l'esprit des mathématiciens; car elle est une erreur manifeste, comme nous l'établirons par la suite.

Tout ce que nous pouvons dire pour le moment sur la nature de δy et δx, c'est que ces quantités sont des fonctions, l'une de y et l'autre de x, qui ont entre elles les relations établies par les équations (1), (2) . . . (6) du § 2, et que l'on peut toujours disposer arbitrairement de l'une de ces fonctions, pourvu que l'on détermine convenablement l'autre, afin que l'équation [1] du même paragraphe soit satisfaite.

5. Des fonctions de nature différente pouvant être combinées entre elles par les signes de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division, nous considérerons d'abord ce qui arrive en général quand on varie des expressions de ce genre, en faisant abstraction de la nature de ces fonctions.

Considérons en premier lieu le cas de fonctions combinées entre elles par voie d'addition ou de soustraction.

Soit donc

$$y = \pm f(x) \pm F(x) \pm \varphi(x) \ldots\ldots$$

on en tire l'équation

$$y + \Delta y = \pm f(x + \Delta x) \pm \mathrm{F}\,(x + \Delta x) \pm \varphi(x + \Delta x). \;.\;.\;.$$

mais § 2

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\,\Delta x + f_{,}(x,\,\Delta x)\,\overline{\Delta x}^2.$$
$$\mathrm{F}\,(x + \Delta x) = \mathrm{F}\,(x) + \mathrm{F}'(x)\,\Delta x + \mathrm{F}_{,}(x,\,\Delta x)\,\overline{\Delta x}^2.$$
$$\varphi\,(x + \Delta x) = \varphi\,(x) + \varphi'(x)\,\Delta x + \varphi_{,}(x,\,\Delta x)\,\overline{\Delta x}^2.$$
$$.\;.$$

donc

$$\begin{aligned} y + \Delta y = & \pm f(x) \pm f'(x)\,\Delta x \pm f_{,}(x,\,\Delta x)\,\overline{\Delta x}^2 \\ & \pm \mathrm{F}\,(x) \pm \mathrm{F}'(x)\,\Delta x \pm \mathrm{F}_{,}(x,\,\Delta x)\,\overline{\Delta x}^2 \\ & \pm \varphi\,(x) \pm \varphi'(x)\,\Delta x \pm \varphi_{,}(x,\,\Delta x)\,\overline{\Delta x}^2 \\ & .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} = & \pm f'(x) \pm \mathrm{F}'(x) \pm \varphi'(x) \pm f_{,}(x,\,\Delta x)\,\Delta x \\ & \pm \mathrm{F}_{,}(x,\,\Delta x)\,\Delta x \pm \varphi_{,}(x,\,\Delta x)\,\Delta x \;.\;.\;. \end{aligned}$$

en faisant $i = 0$, il vient

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \pm f'(x) \pm \mathrm{F}'(x) \pm \varphi'(x). \;.\;.\;.\;.\;.\; (\alpha)$$

mais nous avons vu § 2 que

$$f'(x) = \frac{\delta f\,(x)}{\delta x},\ \mathrm{F}'(x) = \frac{\delta \mathrm{F}\,(x)}{\delta x},\ \varphi'(x) = \frac{\delta \varphi\,(x)}{\delta x}$$

il vient donc pour (α)

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \pm \frac{\delta \varphi\,(x)}{\delta x} \pm \frac{\delta \varphi\,(x)}{\delta x} \pm \frac{\delta f\,(x)}{\delta x} \pm \frac{\delta \mathrm{F}\,(x)}{\delta x} + \;.\;.\;.\;.$$

Et puisque

$$y = \pm \varphi\,(x) \pm f(x) \pm \mathrm{F}\,(x) \;.\;.\;.\;.$$

on trouve

$$\delta.\,[\pm \varphi.(x) \pm f(x) \pm \mathrm{F}\,(x)] = \pm \delta.\varphi\,(x) \pm \delta.f(x) \pm \delta.\mathrm{F}\,(x)$$

donc règle générale : la variation de la somme ou de la différence de plusieurs fonctions, est égale à la somme ou à la différence des variations de chacune de ces fonctions prises séparément.


Digitized by Google

6. Soit $$y = F(x).f(x),$$
on aura :

$$y + \Delta y = F(x + \Delta x).f(x + \Delta x). =$$
$$[F(x) + F'(x)\Delta x + F_{,}(x, \Delta x)\overline{\Delta x}^2][f(x) + f'(x)\Delta x + f_{,}(x, \Delta x)\overline{\Delta x}^2]$$

ou

$$y + \Delta y = F(x) f(x) + F(x) f'(x)\Delta x$$
$$+ f(x) F'(x)\Delta x + [\text{termes en } \overline{\Delta x}^2]$$

d'où

$$\Delta y = F(x) f'(x)\Delta x + f(x) F'(x)\Delta x + P\overline{\Delta x}^2.$$

P représentant l'ensemble des termes qui multiplient $\overline{\Delta x}^2$, donc en divisant par Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = F(x) f'(x) + f(x) F'(x) + P.\Delta x\,;$$

et si $i = 0$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = F(x) f'(x) + f(x) F'(x)$$

puisque, § 2,

$$f'(x) = \frac{\delta f(x)}{\delta x},\ F'(x) = \frac{\delta F(x)}{\delta x}$$

on trouve :

$$\frac{\delta [f(x).F(x)]}{\delta x}\delta x = F(x).\delta f(x) + f(x).\delta F(x).$$

En procédant de la même manière, on trouverait

$$\delta [F(x).f(x).\varphi(x) \ldots \Psi(x)] =$$
$$f(x).\varphi(x) \ldots \Psi(x).\delta F(x) + F(x).\varphi(x) \ldots \Psi(x).\delta f(x) + \ldots$$
$$\ldots + F(x) f(x).\varphi(x) \ldots \delta\Psi(x).$$

D'où l'on conclut la règle générale, que pour obtenir la variation du produit de plusieurs fonctions, on varie séparément chacune de ces fonctions, on la multiplie par le produit des fonctions non variées et l'on fait la somme de tous ces produits.

7. Soit encore

$$y = \frac{F(x)}{f(x)}.$$

d'où

$$y + \Delta y = \frac{F(x + \Delta x)}{f(x + \Delta x)}.$$

ou

$$\Delta y = \frac{F(x + \Delta x)}{f(x + \Delta x)} - \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{f(x).\, F(x + \Delta x) - F(x) f(x + \Delta x)}{f(x) f(x + \Delta x)},$$

$$\Delta y = \frac{f(x)\left[F(x) + F'(x)\Delta x + F(x, \Delta x)\overline{\Delta x^2}\right] - F(x)\left[f(x) + f'(x)\Delta x + f_{,}(x, \overline{\Delta x^2}\right]}{f(x)\left[f(x) + f'(x)\Delta x + f_{,}(x, \Delta x)\overline{\Delta x^2}\right]},$$

$$\Delta y = \frac{f(x) F'(x)\Delta x + f(x) F_{,}(x, \Delta x)\overline{\Delta x^2} - F(x) f'(x)\Delta x - F(x) f_{,}(x, \Delta x)\overline{\Delta x^2}.}{\overline{f(x)}^2 + f(x) f'(x)\Delta x + f(x) f_{,}(x, \Delta x)\overline{\Delta x^2}},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) F'(x) - F(x) f'(x) + \left[f(x) F_{,}(x, \Delta x) - F(x) f_{,}(x, \Delta x)\right]\Delta x}{\overline{f(x)}^2 + f(x) f'(x)\Delta x + f(x) f_{,}(x, \Delta x)\overline{\Delta x^2}}.$$

Pour $i = 0$, on trouve :

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x) F'(x) - F(x) f'(x)}{\overline{f(x)}^2};$$

d'où enfin

$$\delta.\, \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{f(x).\, \delta.\, F(x) - F(x).\, \delta.\, f(x)}{\overline{f(x)}^2}.$$

Donc règle générale : la variation d'une fraction est égale au dénominateur multiplié par la variation du numérateur, moins le produit du numérateur par la variation du dénominateur et le tout divisé par le carré du dénominateur.

8. Soit enfin $y = A f(x)$, A étant une constante, on a

$$y + \Delta y = A f(x + \Delta x) = A\left[f(x) + f'(x)\Delta x + f_{,}(x, \Delta x)\overline{\Delta x^2}\right]:$$

d'où

$$\Delta y = A f'(x)\Delta x + A f_{,}(x, \Delta x)\overline{\Delta x^2}.$$

et en divisant par Δx, il vient :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A f'(x) + A f_{,}(x, \Delta x)\Delta x$$

Si l'on fait $i=0$, on obtient l'égalité

$$\frac{\delta y}{\delta x} = Af'(x) = A\frac{\delta f(x)}{\delta x}.$$

donc

$$\delta.A f(x) = A\delta f(x).$$

Ainsi la variation du produit d'une fonction par une constante est égale au produit de cette constante par la variation de la fonction.

9. Si l'on avait

$$y = f(x) + C. \text{ C étant une constante,}$$

on trouverait

$$\delta.[f(x)+C] = \delta f(x).$$

Donc la variation d'une fonction plus une constante, est égale à la variation simple de cette fonction.

Cela posé, occupons-nous de la variation des fonctions simples que l'on considère en mathématique.

10. La première qui se présente est

$$y = x^m$$

elle donne

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^m = x^m + mx^{m-1}\Delta x$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}.x^{m-2}\overline{\Delta x}^2 + \ldots .$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}.x^{m2}\Delta x + \ldots .$$

Si l'on fait $i=0$,
il vient

$$\frac{\delta y}{\delta x} = mx^{m-1}$$

ou

$$\delta y = mx^{m-1}\delta x,$$

ou encore

$$\delta.x^m = mx^{m-1}.\delta x$$

Donc la variation de x élevé à une certaine puissance est égale à l'exposant changé en coëfficient, multipliant x avec un exposant moindre d'une unité, et multiplié en outre par δx.

11. Si $y = \lg(x)$

$$y + \Delta y = \lg(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \lg(x + \Delta x) - \lg(x) = \lg\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = \lg\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

d'où

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{x} - \frac{\overline{\Delta x}^2}{2x^2} + \frac{\overline{\Delta x}^3}{3x^3} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} - \frac{\Delta x}{2x^2} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{3x^3} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

et si $i = 0$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{x}$$

donc

$$\delta y = \delta . \lg(x) = \frac{\delta x}{x}.$$

La variation du logarithme népérien de x, est donc égale à δx divisé par x. Nous disons logarithme népérien, parce que nous avons supposé le module $A = 1$. S'il s'agissait du logarithme pris dans un autre système, il faudrait multiplier la variation du logarithme népérien, par le module a de ce système.

12. Soit $y = a^x$

$$y + \Delta y = a^{x + \Delta x} = a^x\, a^{\Delta x} = a^x . \left[1 + \lg a\, \Delta x + (\overline{\lg a})^2 \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2} + \ldots\right]$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lg a .\ a^x + a^x (\lg a)^2 \frac{\Delta x}{1.2} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \lg a .\ a^x$$

d'où

$$\delta y = \delta .\ a^x = a^x \lg a .\ \delta x.$$

La variation d'une exponentielle est donc égale à cette exponentielle multipliée par le logarithme népérien de la base et par δx.

13. $y = \sqrt{x}$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta x}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\overline{\Delta x}^2}{x^{\frac{3}{2}}} + \ldots.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\Delta x}{x\sqrt{x}} + \ldots.$$

d'où

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ou

$$\delta y = \delta\sqrt{x} = \frac{\delta y}{2\sqrt{x}}.$$

Donc la variation d'un radical du second degré est égale à la variation de la quantité soumise au radical, divisée par le double du radical.

14. $y = \sin x$

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x) = \sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x.$$

$$y + \Delta y = \sin x \left[1 - \frac{\overline{\Delta x}^2}{2} + \frac{\overline{\Delta x}^4}{2.3.4} - \ldots\right]$$
$$+ \cos x \left[\Delta x - \frac{\overline{\Delta x}^3}{2.3} + \frac{\overline{\Delta x}^5}{2.3.4.5} - \ldots\right]$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \sin x.\left[-\frac{\Delta x}{2} + \frac{\overline{\Delta x}^3}{2.3.4}\ldots\right]$$
$$+ \cos x \left[1 - \frac{\overline{\Delta x}^2}{2.3} + \frac{\overline{\Delta x}^4}{2.3.4.5} - \ldots\right]$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \cos x.$$

d'où

$$\delta y = \delta.\sin x = \cos x.\,\delta x.$$

Donc la variation du sinus d'un arc est égale au cosinus

de ce même arc, multiplié par la variation de cet arc.

15. $y = \cos x$

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x) = \cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \cos x \left[1 - \frac{\overline{\Delta x}^2}{2} + \frac{\overline{\Delta x}^4}{2.3.4} - \ldots\right] \\ - \sin x \left[\Delta x - \frac{\overline{\Delta x}^3}{2.3} + \frac{\overline{\Delta x}^5}{2.3.4.5} - \ldots\right] \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x \left[-\frac{\Delta x}{2} + \frac{\overline{\Delta x}^3}{2.3.4} \ldots\right]$$
$$- \sin x \left[1 - \frac{\overline{\Delta x}^2}{2.3} + \frac{\overline{\Delta x}^5}{2.3.4.5} - \ldots\right]$$

Par conséquent,

$$\frac{\delta y}{\delta x} = - \sin x$$

ou

$$\delta y = \delta . \cos x = - \sin x . \delta x.$$

D'où l'on voit que la variation du cosinus d'un arc est égale à moins le sinus de cet arc, multiplié par la variation du même arc.

16. Soit encore : $y = \operatorname{tg} x$;

on a, en vertu du § 7,

$$\delta . y = \delta . \operatorname{tg} x = \delta . \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \delta x = \frac{\delta x}{\cos^2 x}.$$

Donc pour varier la tangente d'un arc, il suffit de prendre la variation de cet arc et de la diviser par le carré du cosinus correspondant.

On trouverait d'une manière analogue

$$\delta . \sec x = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \delta x = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} \delta x.$$

$$\delta . \cot x = - \frac{\delta x}{\sin^2 x}$$

$$\delta . \operatorname{cosec} x = - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \delta x.$$

17. Soit $y = \text{arc}\,(\sin = x)$
d'où
$$x = \sin y$$
$$\delta x = \cos y .\, \delta y$$
donc
$$\delta y = \frac{\delta x}{\cos y} = \frac{\delta x}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{\delta x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

18. Si $y = \text{arc}\,(\cos = x)$
$$x = \cos y$$
$$\delta x = -\sin y .\, \delta y.$$
$$\delta y = -\frac{\delta x}{\sin y} = -\frac{\delta x}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{\delta x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

19. $$y = \text{arc}\,(\text{tg} = x)$$
$$x = \text{tg}\, y. \qquad \delta x = \frac{\delta y}{\cos^2 y}$$
d'où
$$\delta y = \delta x \cos^2 y = \frac{\delta x}{1 + \text{tg}^2 y} = \frac{\delta x}{1 + x^2}.$$

Un procédé analogue conduirait à la variation des expressions de la forme
$$y = \text{arc}\,(\sec = x),\ y = \text{arc}\,(\cot = x),\ y = \text{arc}\,(\text{cosec} = x).$$

20. Quoique dans tout ce qui précède nous n'ayons considéré que la variable x seule, comme engagée sous le signe fonctionnel, les procédés n'en seront pas moins applicables, lorsqu'au lieu de x, on aura une fonction quelconque de cette variable engagée sous quelqu'un des signes fonctionnels que nous venons de considérer.

On conçoit aussi que ces fonctions peuvent être combinées entre elles; dans ce cas la variation devra s'effectuer d'après les règles des § 5, 6 et 7. On peut d'ailleurs en trouver quelques exemples dans les Traités de calcul différentiel; les résultats sont les mêmes, il suffit d'y changer dy et dx en δy et δx.

Google

VARIATION

DES

FONCTIONS DE FONCTION.

21. Soit $z = \varphi(y)$ en même temps que $y = f(x)$, de sorte que dans ce cas z est fonction d'une fonction de x. Si nous donnons à x un accroissement Δx et que nous nommions Δy et Δz les accroissements respectifs correspondants de y et de z, les équations deviennent :

$$z + \Delta z = \varphi(y + \Delta y) \qquad y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

ou

$$z + \Delta z = \varphi(y) + \varphi'(y)\Delta y + \varphi_{,}(y, \Delta y)\overline{\Delta y}^2,$$

$$y + \Delta y = f(x) + f'(x)\Delta x + f_{,}(x, \Delta x)\overline{\Delta x}^2;$$

d'où

$$\Delta z = \varphi'(y)\Delta y + \varphi_{,}(y, \Delta y)\overline{\Delta y}^2,$$

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + f_{,}(x, \Delta x)\overline{\Delta x}^2;$$

donc

$$\Delta z = \varphi'(y)\left[f'(x)\Delta x + f_{,}(x, \Delta x)\overline{\Delta x}^2\right]$$

$$+ \varphi_{,}(y, \Delta y)\left[f'(x)\Delta x + f_{,}(x, \Delta x)\overline{\Delta x}^2\right]^2.$$

En divisant par Δx, on obtient :

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \varphi'(y).f'(x) + P\Delta x.$$

P représentant l'ensemble de tous les termes qui multiplient Δx.
Si nous faisons $i = 0$, il vient

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \varphi'(y) f'(x)$$

Mais, § 2,

$$\varphi'(y) = \frac{\delta . \varphi(y)}{\delta y}$$

et

$$f'(x) = \frac{\delta . f(x)}{\delta x}$$

par conséquent

$$\delta z = \frac{\delta . \varphi(y)}{\delta y} . \frac{\delta . f(x)}{\delta x} . \delta x = \frac{\delta . \varphi(y)}{\delta y} . \delta f(x)$$

ou encore

$$\delta z = \left(\frac{\delta z}{\delta y}\right) \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right) . \delta x.$$

La variation d'une fonction de fonction plus compliquée n'offrirait pas plus de difficulté.

VARIATION DES FONCTIONS

DE DEUX OU PLUSIEURS

VARIABLES INDÉPENDANTES.

22. Prenons d'abord le cas le plus simple, savoir :

$$z = \varphi(x, y).$$

donnons à x et à y des accroissements Δx et Δy, que nous supposons des fonctions de i telles qu'elles s'annulent quand $i = 0$; représentant par Δz l'accroissement correspondant de z, lequel devra jouir aussi de la propriété de s'annuler quand $i = 0$, on a

$$z + \Delta z = \varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) \qquad (1)$$

Mais nous pouvons considérer $\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y)$ comme la fonction $\varphi(x, y + \Delta y)$ dans laquelle on a changé x en $x + \Delta x$, nous pourrons donc écrire :

$$\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) = \varphi(x, y + \Delta y)$$

$$+ \varphi'(x, y + \Delta y)\,\Delta x + \varphi_{,}(x, \Delta x, y + \Delta y)\,\overline{\Delta x}^2$$

On peut regarder de même $\varphi(x, y + \Delta y)$ comme la fonction $\varphi(x, y)$, dans laquelle on aurait changé y en $y + \Delta y$, d'où l'on conclut :

$$\varphi(x, y + \Delta y) = \varphi(x, y) + \varphi^2(x, y)\,\Delta y + \varphi_2(x, y, \Delta y)\,\overline{\Delta y}^2$$

équation dans laquelle $\varphi^2(x, y)$ représente la dérivée de $\varphi(x, y)$

par rapport à y. De même que $\varphi'(x, y + \Delta y)$, représente la dérivée de $\varphi(x, y + \Delta y)$ par rapport à x.

D'après ces données l'équation (1) devient :

$$z + \Delta z = \varphi(x, y) + \varphi^2(x, y)\,\Delta y + \varphi'(x, y + \Delta y)\,\Delta x$$
$$+ \varphi_1(x, \Delta x, y + \Delta y)\,\overline{\Delta x}^2 + \varphi_2(x, y, \Delta y)\,\overline{\Delta y}^2$$

ou, puisque $z = \varphi(x, y)$,

$$\Delta z = \varphi^2(x, y)\,\Delta y + \varphi'(x, y + \Delta y)\,\Delta x$$
$$+ \varphi_1(x, \Delta x, y + \Delta y)\,\overline{\Delta x}^2 + \varphi_2(x, y, \Delta y)\,\overline{\Delta y}^2 \qquad (2)$$

Soit k un facteur en i tel qu'il s'annule quand $i = 0$. Supposons qu'il divise exactement tous les termes de Δx, et qu'une fois cette division faite, il y ait des termes de la fonction Δx qui cessent de s'annuler quand $i = 0$. Toutes ces suppositions ne préjugent encore rien sur la nature de la fonction Δy qui pourra être quelconque. Mais parmi toutes les formes arbitraires que peut revêtir Δy, nous pourrons nous astreindre à prendre celles dont tous les termes soient divisibles par le facteur k, et dans lesquelles un ou plusieurs de ces termes cessent de s'annuler pour $i = 0$, quand cette division a été effectuée. Il est clair que Δz devra être également divisible par k et devra jouir de toutes les propriétés accessoires que nous venons de signaler.

Cela posé, si nous divisons toute l'équation (2) par Δx, elle devient :

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \varphi^2(x, y)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \varphi'(x, y + \Delta y)$$
$$+ \varphi_1(x, \Delta x, y + \Delta y)\,\Delta x + \varphi_2(x, y, \Delta y)\,\Delta y\,\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Si, après avoir supprimé le facteur k commun aux deux termes des rapports $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, nous faisons $i = 0$, il vient

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \varphi^2(x, y)\,\frac{\delta y}{\delta x} + \left[\varphi'(x, y + \Delta y)\right]_{i=0} \qquad (3)$$



mais

$$[\varphi'(x, y + \Delta y)]_{i=0} = \left[\frac{\delta.\varphi(x, y + \Delta y)}{\delta x}\right]_{i=0} =$$

$$\frac{\delta.\varphi(x, y + 0)}{\delta x} = \frac{\delta.\varphi(x, y)}{\delta x}$$

et

$$\varphi^2(x, y) = \frac{\delta.\varphi(x, y)}{\delta y},$$

l'équation (3) devient par conséquent :

$$\delta z = \frac{\delta.\varphi(x, y)}{\delta y}\delta y + \frac{\delta.\varphi(x, y)}{\delta x}\delta x = \left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)\delta y + \left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)\delta x.$$

Donc la variation d'une fonction de deux variables indépendantes est égale à la somme des variations de cette fonction prises successivement par rapport à chacune de ces variables.

Les expressions $\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)\delta y$, et $\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)\delta x$ sont, ce que l'on nomme, les variations partielles de z par rapport à y et à x.

On comprend aisément que, malgré toutes les suppositions restrictives que nous venons de faire, δy et δx peuvent revêtir arbitrairement toutes les formes imaginables. Ces suppositions ont eu pour but d'écarter toutes les propriétés étrangères à l'esprit du calcul des variations. Quant à la nécessité de satisfaire à ces conditions, on ne pourra l'apprécier clairement qu'après avoir découvert la nature intime des quantités δx, δy, δz, etc.

Ces considérations s'étendent facilement aux cas de fonctions de plus de deux variables indépendantes. Sans nous y arrêter davantage, nous pourrons donc passer à la solution d'un autre genre de questions.

Digitized by Google

VARIATION

DES

FONCTIONS IMPLICITES.

23. Soit la fonction implicite la plus simple

$$\varphi(x, y) = 0$$

Si nous donnons à x un accroissement Δx, y recevra un accroissement correspondant Δy. On trouve ainsi :

$$\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0 \qquad (1)$$

Mais $\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y)$ peut être regardé comme la fonction $\varphi(x, y + \Delta y)$, dans laquelle on a changé x en $x + \Delta x$; l'équation (1) pourra donc s'écrire, d'après le § 2,

$$\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) = \varphi(x, y + \Delta y)$$
$$+ \varphi'(x, y + \Delta y)\,\Delta x + \varphi_{,}(x, \Delta x, y + \Delta y)\,\overline{\Delta x}^2 = 0. \qquad (2)$$

Considérant de même $\varphi(x, y + \Delta y)$ comme la fonction $\varphi(x, y)$, dans laquelle on a changé y en $y + \Delta y$; (2) devient

$$\varphi(x, y) + \varphi^2(x, y)\,\Delta y + \varphi'(x, y + \Delta y)\,\Delta x$$
$$+ \varphi_{,}(x, \Delta x, y + \Delta y)\,\overline{\Delta x}^2 + \varphi_{2}(x, y, \Delta y)\,\overline{\Delta y}^2 = 0. \qquad (3)$$

mais

$$\varphi(x, y) = 0$$

donc

$$\varphi^2(x, y)\,\Delta y + \varphi'(x, y + \Delta y)\,\Delta x$$
$$+ \varphi_{,}(x, \Delta x, y + \Delta y)\,\overline{\Delta x}^2 + \varphi_{2}(x, y, \Delta y)\,\overline{\Delta y}^2 = 0;$$

Digitized by Google

divisant par Δx, on trouve

$$\varphi^2(x, y)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \varphi'(x, y+\Delta y) + \varphi_1(x, \Delta x, y+\Delta y)\,\Delta x$$

$$+ \varphi_2(x, y, \Delta y)\,\Delta y . \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Si nous faisons $i = 0$, cette équation devient

$$\varphi^2(x, y)\frac{\delta y}{\delta x} + \varphi'(x, y) = 0,$$

mais

$$\varphi'(x, y) = \frac{\delta . \varphi}{\delta x}, \quad \varphi^2(x, y) = \frac{\delta \varphi}{\delta y},$$

donc

$$\left(\frac{\delta \varphi}{\delta y}\right)\frac{\delta y}{\delta x} + \left(\frac{\delta \varphi}{\delta x}\right) = 0,$$

d'où enfin

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{\left(\frac{\delta \varphi}{\delta x}\right)}{\left(\frac{\delta \varphi}{\delta y}\right)},$$

ou

$$\delta y = -\frac{\left(\frac{\delta \varphi}{\delta x}\right)}{\left(\frac{\delta \varphi}{\delta y}\right)}\delta x. \qquad (4)$$

On voit que varier une fonction $\varphi(x, y) = 0$, revient à varier la fonction $z = \varphi(x, y)$, en faisant dans le résultat final $\delta z = 0$.

De l'équation (4) on conclut cette règle : pour avoir le coëfficient de variation de deux variables liées implicitement par une fonction, on prend les dérivées partielles de cette fonction, d'abord par rapport à la variable indépendante, ensuite par rapport à la variable dépendante et l'on divise le premier résultat par le second ; ce quotient, pris négativement, donne le rapport du δ de la variable dépendante au δ de la variable indépendante.

24. Considérons encore les deux fonctions implicites simultanées

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

$$\Psi(x, y, z) = 0$$

Les valeurs de deux de ces variables dépendront nécessairement de celles de la troisième. Regardons x comme la variable indépendante. Le problème qu'il faut résoudre consiste à trouver la valeur des rapports $\frac{\delta y}{\delta x}$ et $\frac{\delta z}{\delta x}$.

En traitant séparément chacune de ces fonctions de la même manière que celle du paragraphe précédent, on arrive aux résultats :

$$\left(\frac{\delta\varphi}{\delta x}\right)\delta x + \left(\frac{\delta\varphi}{\delta y}\right)\delta y + \left(\frac{\delta\varphi}{\delta z}\right)\delta z = 0$$

$$\left(\frac{\delta\Psi}{\delta x}\right)\delta x + \left(\frac{\delta\Psi}{\delta y}\right)\delta y + \left(\frac{\delta\Psi}{\delta z}\right)\delta z = 0$$

D'où l'on tire pour $\frac{\delta y}{\delta x}$ et $\frac{\delta z}{\delta x}$, les valeurs :

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{\left[\frac{\delta\Psi}{\delta z}\cdot\frac{\delta\varphi}{\delta x} - \frac{\delta\varphi}{\delta z}\cdot\frac{\delta\Psi}{\delta x}\right]}{\left[\frac{\delta\Psi}{\delta z}\cdot\frac{\delta\varphi}{\delta y} - \frac{\delta\varphi}{\delta z}\cdot\frac{\delta\Psi}{\delta y}\right]}$$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = -\frac{\left[\frac{\delta\Psi}{\delta y}\cdot\frac{\delta\varphi}{\delta x} - \frac{\delta\varphi}{\delta y}\cdot\frac{\delta\Psi}{\delta x}\right]}{\left[\frac{\delta\Psi}{\delta y}\cdot\frac{\delta\varphi}{\delta z} - \frac{\delta\varphi}{\delta y}\cdot\frac{\delta\Psi}{\delta z}\right]}$$

de même

$$\frac{\delta y}{\delta z} = -\frac{\left[\frac{\delta\Psi}{\delta x}\cdot\frac{\delta\varphi}{\delta z} - \frac{\delta\varphi}{\delta x}\cdot\frac{\delta\Psi}{\delta z}\right]}{\left[\frac{\delta\Psi}{\delta x}\cdot\frac{\delta\varphi}{\delta y} - \frac{\delta\varphi}{\delta x}\cdot\frac{\delta\Psi}{\delta y}\right]}$$

On en déduirait encore, par renversement, la valeur des rapports

$$\frac{\delta x}{\delta y}, \frac{\delta x}{\delta z}, \frac{\delta z}{\delta y}.$$

Dans les applications on choisira les équations de ce groupe qui correspondent au choix que l'on aura fait de la variable indépendante.

On traiterait d'une manière analogue les fonctions implicites qui se présenteraient sous des formes plus compliquées.

Digitized by Google

DÉRIVÉES ET VARIATIONS

SUCCESSIVES

DES FONCTIONS.

25. En variant la fonction $\varphi(x)$, nous sommes arrivés, § 2, au rapport $\frac{\delta y}{\delta x} = \varphi'(x)$, que nous avons nommé dérivée de la fonction $\varphi(x)$. On comprend aisément que de la même manière que nous avons pris la dérivée de $\varphi(x)$, nous pourrions prendre aussi celle de $\varphi'(x)$. En posant

$$z = \frac{\delta y}{\delta x} = \varphi'(x)$$

et en suivant un procédé identique à celui qui nous a conduit à $\varphi'(x)$, nous trouverions pour $\frac{\delta z}{\delta x}$ une fonction de x que nous mettrons, par analogie, sous la forme $\varphi''(x)$, en la nommant la dérivée première de $\varphi'(x)$ ou la dérivée seconde de $\varphi(x)$; on a ainsi :

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\delta . \frac{\delta y}{\delta x}}{\delta x} = \frac{\delta . \frac{\delta . \varphi(x)}{\delta x}}{\delta x} = \frac{\delta . \varphi'(x)}{\delta x} = \varphi''(x).$$

On trouverait d'une manière analogue les dérivées 3e, 4e, 5e, etc., que nous représenterons par :

$$\varphi'''(x),\ \varphi^{\text{IV}}(x),\ \varphi^{\text{V}}(x)\ \ldots\ldots$$

de sorte que

$$\varphi'''(x) = \frac{\delta . \frac{\delta . \frac{\delta y}{\delta x}}{\delta x}}{\delta x}, \quad \varphi^{\text{IV}}(x) = \frac{\delta . \frac{\delta . \frac{\delta . \frac{\delta y}{\delta x}}{\delta x}}{\delta x}}{\delta x}. \ldots\ldots$$

26. Nous devons observer que dans ce qui précède il n'est pas nécessaire que le δ de la seconde variation corresponde au δ de la première, car dans la seconde variation δx indique non-seulement une fonction arbitraire de x, mais encore une fonction dont la forme ne dépend aucunement de celle du δx de la première variation. Pour les distinguer, nous pourrons accentuer le δ de la seconde variation en écrivant

$$\frac{\delta' \frac{\delta y}{\delta x}}{\delta' x} = \varphi''(x).$$

de même

$$\frac{\delta'' \frac{\delta' \frac{\delta y}{\delta x}}{\delta' x}}{\delta'' x} = \varphi'''(x), \text{ etc.}$$

Nous distinguerons ces différents modes de variation, en disant que le thème de variation diffère.

Il est à remarquer d'ailleurs que, quel que soit l'ordre dans lequel les thèmes se succèdent, le résultat est toujours le même, ainsi :

$$\frac{\delta' \frac{\delta y}{\delta x}}{\delta' x} = \frac{\delta \frac{\delta' y}{\delta' x}}{\delta x}, \text{ etc.} \ldots$$

Cette distinction, qui n'a qu'une importance secondaire dans la théorie, en acquiert beaucoup dans certaines applications.

27. Nous avons encore à présenter quelques observations

qui, pour le moment, n'offrent pas un bien grand intérêt; mais, comme il n'est pas impossible qu'on en fasse plus tard des applications utiles, nous devons en dire quelques mots.

Nous avons trouvé

$$\delta y = \varphi'(x).\ \delta x.$$

Sans avoir égard à l'indétermination de l'une des deux fonctions δy et δx, on pourrait encore appliquer à cette équation les procédés de la variation, ce qui donne, en vertu de la règle du § 6 :

$$\delta'\delta y = \varphi''(x).\ \delta x.\ \delta' x + \varphi'(x)\left(\frac{\delta'\delta x}{\delta' x}\right)\delta' x.$$

Comme on le voit, cette équation renferme une double indétermination : l'une relative au thème δ et l'autre au thème δ'.

On pourrait étendre ces variations encore plus loin; mais comme ces investigations ne nous conduiraient actuellement à aucun résultat, nous nous contenterons de signaler le procédé sans rien préjuger sur sa nature, ni sur les applications dont il pourrait être susceptible.

Un examen attentif de ce chapitre nous démontre qu'il y a une grande différence entre les dérivées successives et les variations successives d'une fonction. Le calcul différentiel n'admet aucune distinction entre les différentielles et les coëfficients différentiels, parce que, en effet, ces deux dénominations ne désignent au fond qu'une seule et même opération; c'est sous ce point de vue que le calcul différentiel ne diffère en rien du calcul des fluxions. Quant aux applications du calcul intégral, applications dont la théorie des fluxions n'est pas susceptible, on n'y est arrivé que par une espèce d'intuition inexplicable. Le calcul différentiel, tel qu'on le considère, ne pouvait directement y conduire. On n'y est parvenu qu'en donnant, sans s'en apercevoir, à la quantité dx, ou si l'on veut au signe d, une signification qu'il n'avait pas primitivement et qu'il n'a

jamais eue dans l'esprit de ceux qui s'en sont occupés. Cette signification, nous serons plus à même de l'apprécier quand nous aurons appliqué le calcul des variations à la solution de ces mêmes problèmes.

Digitized by Google

THÉORÈME DES DÉRIVÉES.

28. Ce théorème mérite au plus haut point de fixer notre attention, car il est la base d'une foule d'applications belles et utiles. C'est le théorème de Taylor, du calcul différentiel; avec cette différence, qu'il est plus général et qu'il se démontre d'une manière rigoureuse.

En commençant cette étude nous avons obtenu l'égalité

$$\varphi(x + \Delta x) = \varphi(x) + \varphi'(x)\,\Delta x + \varphi_{,}(x, \Delta x)\,\overline{\Delta x}^2.$$

Si, au lieu de donner à x l'accroissement Δx, on lui donnait l'accroissement δx par un raisonnement identique, on arriverait à l'équation

$$\varphi(x + \delta x) = \varphi(x) + \varphi'(x)\,\delta x + \varphi_{,}(x, \delta x)\,\delta x^2. \qquad (1)$$

Mais en général $\varphi_{,}(x, \delta x)$ contiendra des termes indépendants de δx et des termes multipliés par une certaine puissance de δx; en divisant ces derniers par δx et représentant le quotient par $\varphi_{2}(x, \delta x)$, on aura, en désignant par $\mathrm{F}(x)$ l'ensemble des termes indépendants de δx :

$$\varphi_{,}(x, \delta x) = \mathrm{F}(x) + \varphi_{2}(x, \delta x).\,\delta x.$$

l'équation (1) devient ainsi :

$$\varphi(x + \delta x) = \varphi(x) + \varphi'(x)\,\delta x + \mathrm{F}(x)\,\overline{\delta x}^2 + \varphi_{2}(x, \delta x)\,\overline{\delta x}^3 \quad (2).$$

De même, on aura en général :

$$\varphi_2 (x, \delta x) = F_{,} (x) + \varphi_3 (x, \delta x) \delta x.$$

ce qui transforme l'équation (2) en la suivante :

$$\varphi (x + \delta x) =$$

$$\varphi (x) + \varphi' (x) \delta x + F (x) \overline{\delta x}^2 + F_{,} (x) \overline{\delta x}^3 + \varphi_3 (x, \delta x) \overline{\delta x}^4.$$

et ainsi de suite, on arrivera de cette manière à une équation de la forme :

$$\varphi (x + \delta x) = \varphi (x) + \varphi' (x) \delta x + F (x) \overline{\delta x}^2$$

$$+ F_{,} (x) \overline{\delta x}^3 + F_{2} (x) \overline{\delta x}^4 + \ldots \qquad (3).$$

Cela posé, cherchons quelles sont les valeurs que doivent avoir les fonctions $F (x)$, $F_{,} (x)$, $F_2 (x)$ . . . . pour que l'équation (3) soit satisfaite.

29. En faisant $x + \delta x = x'$, l'équation (3) devient

$$\varphi (x') = \varphi (x) + \varphi' (x) \delta x + F (x) \overline{\delta x}^2 + F_{,} (x) \overline{\delta x}^3 + \ldots\ldots$$

Si nous varions cette équation par rapport à x, en remarquant que x' étant fonction de x, $\varphi (x')$ devient fonction de fonction de x ; nous trouvons :

$$\varphi' (x'), \frac{\delta' . x'}{\delta' x} \delta' x =$$

$$\varphi' (x) \delta' x + \varphi' (x) \delta' \delta x + 2 F (x). \delta x. \delta' \delta x + 3 F_{,} (x) \overline{\delta x}^2 . \delta' \delta x + \ldots$$

$$+ \varphi'' (x) \delta x \delta' x + F' (x) \overline{\delta x}^2 \delta' x + F_{,}' (x) \overline{\delta x}^3 \delta' x + \ldots\ldots$$

d'où, en mettant pour x' sa valeur $x + \delta x$, on déduit :

$$\varphi' (x + \delta x) \frac{\delta' (x + \delta x)}{\delta' x} \delta' x =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi' (x) \delta' x + \varphi' (x) \delta' \delta x + 2 F (x) \delta x. \delta' \delta x + 3 F_{,} (x) \overline{\delta x}^2 . \delta' \delta x + \ldots \\ \qquad + \varphi (x) \delta' x. \delta' x + F' (x) \overline{\delta x}^2 . \delta' x + F_{,}' (x) \overline{\delta x}^3 . \delta' x + \ldots \end{array} \right.$$

Si nous développons $\varphi'(x + \delta x)$ de la même manière que $\varphi(x + \delta x)$, il vient, en remarquant que $\delta'(x + \delta x) = \delta' x + \delta' \delta x$,

$$[\varphi'(x) + \varphi''(x)\,\delta x + f(x)\,\overline{\delta x}^2 + f_{,}(x)\,\overline{\delta x}^3 + \ldots]\,(\delta' x + \delta'\delta x) =$$

$$\varphi'(x)\,\delta' x + \varphi'(x)\,\delta'\delta x + 2\,F(x)\,\delta x\,\delta'\delta x + \ldots$$

$$+ \varphi''(x)\,\delta x\,\delta' x + F'(x)\,\overline{\delta x}^2\,\delta' x + \ldots$$

ou, en effectuant la multiplication indiquée :

$$\left.\begin{matrix} \varphi'(x)\,\delta' x + \varphi''(x)\,\delta x\,\delta' x + f(x)\,\overline{\delta x}^2\,\delta' x + f_{,}(x)\,\overline{\delta x}^3\,\delta' x \ldots\ldots \\ \varphi'(x)\,\delta'\delta x + \varphi''(x)\,\delta x\,\delta'\delta x + f(x)\,\overline{\delta x}^2\,\delta'\delta x + f_{,}(x)\,\overline{\delta x}^3\,\delta'\delta x \end{matrix}\right\} =$$

$$\left\{\begin{matrix} \varphi'(x)\,\delta' x + \varphi'(x)\,\delta'\delta x + 2\,F(x)\,\delta x\,\delta'\delta x + \ldots \\ + \varphi''(x)\,\delta x\,\delta' x + F'(x)\,\overline{\delta x}^2\,\delta' x + \ldots \end{matrix}\right.$$

A cause de la forme arbitraire des δ' et δ, on a, en vertu de la théorie des coefficients indéterminés, les égalités :

$$\left.\begin{matrix} \varphi'(x) = \varphi'(x) \\ \varphi''(x) = \varphi''(x) \\ 2\,F(x) = \varphi''(x) \\ F'(x) = f(x) \\ 3\,F_{,}(x) = f(x) \\ F_{,}'(x) = f_{,}(x) \\ 4\,F_{2}(x) = f_{,}(x) \\ \ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right\} \text{d'où l'on tire} \left\{\begin{matrix} F(x) = \frac{1}{2}\varphi''(x). \\ f(x) = F'(x) = \frac{\delta.\,\frac{1}{2}\varphi''(x)}{\delta x} = \frac{1}{2}\varphi'''(x) \\ F_{,}(x) = \frac{1}{3} f(x) = \frac{1}{2\,.\,3}\varphi'''(x). \\ f_{,}(x) = F_{,}'(x) = \frac{1}{2\,.\,3}\varphi^{\text{IV}}(x). \\ F_{2}(x) = \frac{1}{4} f_{,}(x) = \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4}\varphi^{\text{IV}}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right.$$

L'équation (5) du paragraphe précédent devient donc

$$[1] \qquad \varphi(x + \delta x) = \varphi(x) + \varphi'(x)\,\delta x + \varphi''(x)\,\frac{\overline{\delta x}^2}{1.2}$$

$$+ \varphi'''(x)\,\frac{\overline{\delta x}^3}{1.2.3} + \varphi^{\text{IV}}(x)\,\frac{\overline{\delta x}^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$

Telle est la formule que nous désignerons sous le nom de théorème des dérivées, et dont nous allons donner les applications les plus générales.

On voit que cette formule correspond exactement à celle de Taylor ; elle offre plus de généralité, puisqu'au lieu de la quantité constante h, on a une fonction quelconque de x.

30. Soit, comme application

$$y = x^m$$

à développer en série quand on y donne à x l'accroissement δx. Nous avons, pour ce cas particulier

$$\varphi\ (x) = x^m$$

d'où

$$\varphi'\ (x) = \frac{\delta.\ x^m}{\delta x} = mx^{m-1}$$

$$\varphi''\ (x) = \frac{\delta.\ mx^{m-1}}{\delta x} = m\ (m-1)\ x^{m-2}$$

$$\varphi'''\ (x) = \frac{\delta.\ m\ (m-1)\ x^{m-2}}{\delta x} = m\ (m-1)\ (m-2)\ x^{m-3}$$

. . . .

donc, en vertu du théorème des dérivées,

$$(x + \delta x)^m = x^m + mx^{m-1}\ \delta x + \frac{m\ (m-1)}{1.2}\ x^{m-2}\ \overline{\delta x}^2$$
$$+ \frac{m\ (m-1)\ (m-2)}{1.2.3}\ x^{m-3}\ \overline{\delta x}^3 + \ldots$$

série qui correspond exactement à celle que l'on a trouvée par d'autres procédés, sous le nom de binôme de Newton.

31. Soit encore

$$y = \sin x$$

à développer en série quand x devient $x + \delta x$; on a, pour ce cas :

$$\varphi'(x) = \frac{\delta.\sin x}{\delta x} = \cos x$$

$$\varphi''(x) = -\sin x$$

$$\varphi'''(x) = -\cos x$$

$$\varphi^{IV}(x) = \sin x$$

$$\varphi^{V}(x) = \cos x$$

. . . .

donc

$$(1).\ \sin(x+\delta x) = \sin x + \cos x.\ \delta x - \sin x\,\frac{\overline{\delta x}^2}{2} - \cos x\,\frac{\overline{\delta x}^3}{2.3}$$

$$+ \sin x\,\frac{\overline{\delta x}^4}{2.3.4} + \cos x\,\frac{\overline{\delta x}^5}{2.3.4.5} - \ldots\ldots$$

ou

$$\sin(x+\delta x) = \begin{cases} \sin x\left[1 - \frac{\overline{\delta x}^2}{2} + \frac{\delta x^4}{2.3.4} - \frac{\overline{\delta x}^6}{2.3\ldots6} + \ldots\right] \\ + \cos x\left[\delta x - \frac{\overline{\delta x}^3}{2.3} + \frac{\overline{\delta x}^5}{2.3.4.5} - \ldots\ldots\right] \end{cases}$$

puisque

$$\sin\delta x = \delta x - \frac{\overline{\delta x}^3}{2.3} + \frac{\overline{\delta x}^5}{2.3.4.5} - \ldots\ldots$$

et

$$\cos\delta x = 1 - \frac{\overline{\delta x}^2}{2} + \frac{\overline{\delta x}^4}{2.3.4} - \ldots\ldots$$

on trouve

$$\sin(x+\delta x) = \sin x\cos\delta x + \cos x\sin\delta x$$

résultat bien connu en trigonométrie.

Si dans (1) on fait $x = 0$, il vient $\delta x = a$, $\cos x = 1$, $\sin x = 0$, d'où l'on conclut, pour ce cas,

$$\sin a = a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5} - \ldots\ldots$$

série qui a déjà été obtenue précédemment par d'autres pro-

Digitized by Google

cédés. Dans ce qui précède, nous considérons δx comme une fonction de x, telle qu'elle ne devienne ni 0, ni ∞, ni $\frac{0}{0}$ quand on y fait $x = 0$.

On conçoit aisément que le théorème des dérivées ne peut en aucune manière servir à démontrer les séries que nous avons obtenues en algèbre; car, outre que celles-ci nous ont servi à obtenir les dérivées, elles sont rigoureusement démontrées par la théorie des coefficients indéterminés. Leur obtention au moyen du théorème des dérivées, prouve au contraire l'exactitude de celui-ci, et indique que l'on peut avoir confiance dans les résultats obtenus au moyen de cette formule, qui, d'ailleurs, se trouve démontrée rigoureusement pour une fonction de nature quelconque.

Étendons le théorème des dérivées au cas d'une fonction de deux et de plusieurs variables.

32. Soit

$$z = \varphi(x, y).$$

Les variables x et y étant indépendantes, les variations qu'on leur fera subir seront également indépendantes. La variation qu'un accroissement δx, attribué à x, fera subir à la fonction, sera donc indépendante de celle qu'un accroissement δy donné à y, fera subir à la même fonction. Nous pourrons par conséquent faire varier séparément ces variables, en observant toujours que δx est complétement indépendant de δy et réciproquement.

Faisant varier d'abord x, on trouve :

$$z_{x+\delta x, y.} = \varphi(x + \delta x, y)$$

$$= \varphi(x, y) + \frac{\delta\varphi}{\delta x}\delta x + \frac{\delta . \frac{\delta\varphi}{\delta x}}{\delta x}\frac{\overline{\delta x}^2}{2} + \ldots\ldots$$

si nous faisons varier ensuite y, on aura

$$z_{x+\delta x,\, y+\delta y} = \varphi(x+\delta x,\, y+\delta y) =$$

$$\varphi(x, y+\delta y) + \frac{\delta.\varphi(x, y+\delta y)}{\delta x}.\,\delta x + \frac{\delta.\dfrac{\delta.\varphi(x, y+\delta y)}{\delta x}}{\delta x}\,\frac{\overline{\delta x}^2}{2} + \ldots$$

En développant la fonction $\varphi(x, y+\delta y)$ d'après le théorème des dérivées, on déduit de cette égalité, en ordonnant convenablement :

$$\varphi(x+\delta x,\, y+\delta y) =$$

$$\varphi(x, y) + \frac{\delta\varphi}{\delta y}.\,\delta y + \frac{\delta.\dfrac{\delta\varphi}{\delta y}}{\delta y}.\frac{\overline{\delta y}^2}{2} + \frac{\delta.\dfrac{\delta.\dfrac{\delta\varphi}{\delta y}}{\delta y}}{\delta y}.\frac{\overline{\delta y}^3}{2.3} + \ldots$$

$$+ \frac{\delta\varphi}{\delta x}.\,\delta x + \frac{\delta.\dfrac{\delta\varphi}{\delta y}}{\delta x}.\,\delta x\,\delta y + \frac{\delta.\dfrac{\delta.\dfrac{\delta\varphi}{\delta y}}{\delta y}}{\delta x}.\frac{\delta x\,\overline{\delta y}^2}{2} + \ldots$$

$$+ \frac{\delta.\dfrac{\delta\varphi}{\delta x}}{\delta x}.\frac{\overline{\delta x}^2}{2} + \frac{\delta.\dfrac{\delta.\dfrac{\delta\varphi}{\delta y}}{\delta x}}{\delta x}.\frac{\overline{\delta x}^2\,\delta y}{2} + \ldots$$

$$+ \frac{\delta.\dfrac{\delta.\dfrac{\delta\varphi}{\delta x}}{\delta x}}{\delta x}.\frac{\overline{\delta x}^3}{2.3} + \ldots$$

Mais si, au lieu de varier d'abord x et ensuite y, nous avions commencé par varier y et ensuite x, des raisonnements identiques à ceux qui nous ont conduit à la formule que nous venons d'obtenir, nous auraient donné la formule suivante, qui correspond exactement à la première, dans laquelle on aurait changé x en y et réciproquement :

$$\varphi(x+\delta x,\, y+\delta y) =$$

$$\varphi(x,y) + \frac{\delta\varphi}{\delta x}.\delta x + \frac{\delta.\frac{\delta\varphi}{\delta x}}{\delta x}.\frac{\overline{\delta x}^2}{2} + \frac{\delta.\frac{\delta.\frac{\delta\varphi}{\delta x}}{\delta x}}{\delta x}.\frac{\overline{\delta x}^3}{2.3} + \ldots.$$

$$+ \frac{\delta\varphi}{\delta y}.\delta y + \frac{\delta.\frac{\delta\varphi}{\delta x}}{\delta y}.\delta x\,\delta y + \frac{\delta.\frac{\delta.\frac{\delta\varphi}{\delta x}}{\delta x}}{\delta y}.\frac{\overline{\delta x}^2\,\delta y}{2} + \ldots.$$

$$+ \frac{\delta.\frac{\delta\varphi}{\delta y}}{\delta y}.\frac{\overline{\delta y}^2}{2} + \frac{\delta.\frac{\delta.\frac{\delta\varphi}{\delta x}}{\delta y}}{\delta y}.\frac{\delta x\,\overline{\delta y}^2}{2} + \ldots.$$

$$+ \frac{\delta.\frac{\delta.\frac{\delta\varphi}{\delta y}}{\delta y}}{\delta y}.\frac{\overline{\delta y}^3}{2.3} + \ldots.$$

Si nous regardons δx et δy comme ayant la même valeur dans ces deux équations, le premier membre de la première sera identique à celui de la seconde; les seconds membres devront donc être également identiques et les coefficients des mêmes puissances de δx et δy devront être égaux, d'où l'on conclut :

$$\frac{\delta.\frac{\delta\varphi}{\delta y}}{\delta x} = \frac{\delta.\frac{\delta\varphi}{\delta x}}{\delta y};$$

on trouverait aussi, en comparant les autres termes de la série :

$$\frac{\delta.\frac{\delta.\frac{\delta\varphi}{\delta y}}{\delta y}}{\delta x} = \frac{\delta.\frac{\delta.\frac{\delta\varphi}{\delta x}}{\delta y}}{\delta y} = \frac{\delta.\frac{\delta.\frac{\delta\varphi}{\delta y}}{\delta x}}{\delta y}, \text{ etc., etc.} \qquad (1)$$

Il s'ensuit de ces égalités que, si l'on prend les dérivées successives d'une fonction de deux variables, successivement par rapport à chacune d'elles, le résultat est le même dans quelque ordre que l'on prenne ces dérivées, pourvu que le nombre de fois qu'on le prend, par rapport à une même variable, soit le même dans les deux épreuves.

Pour arriver au développement de $z = \varphi(x + \delta x, y + \delta y)$ nous aurions pu suivre une marche plus directe et plus facile, en remarquant que la fonction $\varphi(x + \delta x, y + \delta y)$ peut être regardée comme la fonction $\varphi(x, y + \delta y)$ dans laquelle on aurait changé x en $x + \delta x$. Partant de là et désignant par $\varphi'(x, y + \delta y)$, $\varphi''(x, y + \delta y)$, $\varphi'''(x, y + \delta y)$, les dérivées successives de la fonction $\varphi(x, y + \delta y)$, prises par rapport à x, nous pourrons écrire, en vertu du théorème des dérivées

$$\varphi(x + \delta x, y + \delta y) =$$

$$\varphi(x, y + \delta y) + \varphi'(x, y + \delta y)\,\delta x + \varphi''(x, y + \delta y)\frac{\overline{\delta x}^2}{2} + \ldots. \quad (1)$$

On peut considérer de même les fonctions $\varphi(x, y + \delta y)$, $\varphi'(x, y + \delta y)$, $\varphi''(x, y + \delta y)$.... comme représentant les fonctions $\varphi(x, y)$, $\varphi'(x, y)$, $\varphi''(x, y)$... dans lesquelles on aurait changé y en $y + \delta y$; on obtiendra donc, par l'application de la même formule, en marquant les dérivées successives par rapport à y, par les chiffres 1, 2, 3.... placés au bas de la lettre φ:

$$\varphi(x, y + \delta y) = \varphi(x, y) + \varphi_1(x, y)\,\delta y + \varphi_2(x, y)\frac{\overline{\delta y}^2}{2} + \ldots.$$

$$\varphi'(x, y + \delta y) = \varphi'(x, y) + \varphi_1'(x, y)\,\delta y + \varphi_2'(x, y)\frac{\overline{\delta y}^2}{2} + \ldots.$$

$$\varphi''(x, y + \delta y) = \varphi''(x, y) + \varphi_1''(x, y)\,\delta y + \varphi_2''(x, y)\frac{\overline{\delta y}^2}{2} + \ldots.$$

. . . .

En substituant ces valeurs dans l'équation (1), elle devient :

$$\varphi(x+\delta x, y+\delta y) =$$

$$\varphi(x,y) + \varphi'(x,y)\,\delta x + \varphi''(x,y)\frac{\overline{\delta x}^2}{2} + \varphi'''(x,y)\frac{\overline{\delta x}^3}{2.3} + \ldots$$

$$+ \varphi_1(x,y)\,\delta y + \varphi_1'(x,y)\,\delta x\,\delta y + \varphi_1''(x,y)\frac{\overline{\delta x}^2\,\delta y}{2} + \ldots$$

$$+ \varphi_2(x,y)\frac{\overline{\delta y}^2}{2} + \varphi_2'(x,y)\frac{\delta x\,\overline{\delta y}^2}{2} + \ldots$$

$$+ \varphi_3(x,y)\frac{\overline{\delta y}^3}{2.3} + \ldots$$

$$+ \ldots$$

Dans cette formule $\varphi_1'(x, y)$ représente la dérivée de $\varphi(x, y)$, prise une fois par rapport à x et une fois par rapport à y. Il est clair que nous aurions pu renverser le raisonnement qui nous a conduit à cette formule en envisageant d'abord ce qui est relatif à y et ensuite ce qui est relatif à x, sans que le résultat fut changé ; nous pouvons en conclure que l'ordre dans lequel on prend les dérivées de $\varphi(x, y)$ par rapport à chacune des variables x et y est indifférent, pourvu qu'on les prenne un même nombre de fois, par rapport à une même variable. Ainsi $\varphi_1'(x, y)$ indique que l'on doit prendre la dérivée de $\varphi(x, y)$, une fois par rapport à x et une fois par rapport à y. De même $\varphi_1''(x, y)$ marque la dérivée prise deux fois par rapport à x et une fois par rapport à y, et ainsi de suite. La notation que j'ai adoptée présente l'avantage de ne rien préjuger sur l'ordre dans lequel ces dérivées doivent être prises ; outre qu'elle abrège singulièrement l'écriture de ces séries, elle est très-simple et d'une interprétation facile. Dans les cas particuliers, on pourra choisir l'ordre de la dérivation qui conduira le plus rapidement au résultat.

33. Si nous avions $v = \varphi(x, y, z)$, des considérations ana-

Digitized by Google

logues à celles du paragraphe précédent nous conduiraient à l'équation suivante, dans laquelle ${}_1\varphi$, ${}_2\varphi$, ${}_3\varphi$. . . . représentent respectivement les dérivées 1[e], 2[e], 3[e]. . . . de $\varphi(x, y, z)$ par rapport à z; les autres notations restent les mêmes que plus haut.

$$\varphi(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) =$$

$$\varphi(x, y, z) + \varphi'(x, y, z)\,\delta x + \varphi''(x, y, z)\frac{\overline{\delta x}^2}{2} + \ldots\ldots$$

$$+ \varphi_1(x, y, z)\,\delta y + \varphi_1'(x, y, z)\,\delta x\,\delta y + \ldots\ldots$$

$$+ {}_1\varphi(x, y, z)\,\delta z + \varphi_2(x, y, z)\frac{\overline{\delta y}^2}{2} + \ldots\ldots$$

$$+ {}_1\varphi'(x, y, z)\,\delta x\,\delta z + \ldots\ldots$$

$$+ {}_1\varphi_1(x, y, z)\,\delta y\,\delta z + \ldots\ldots$$

$$+ {}_2\varphi(x, y, z)\frac{\overline{\delta z}^2}{2} + \ldots\ldots$$

$$+ \ldots\ldots$$

34. Avant de passer aux applications du théorème des dérivées, nous devons examiner certains cas où ce théorème est dit *tomber en défaut*. Ces cas peuvent se résumer dans la forme

$$F(x)\,[a - x]^m,$$

m étant fractionnaire ou $m < 0$. Si l'on traite cette expression par les procédés ordinaires on obtient le développement de

$$F(x + \delta x)\,[a - x - \delta x]^m =$$

$$\left[F(x) + F'(x)\,\delta x + F''(x)\frac{\overline{\delta x}^2}{2} + \ldots\ldots\right] \times$$

$$\left[(a - x)^m - m\,(a - x)^{m-1}\,\delta x + \frac{m\,(m - 1)}{1\,.\,2}\,.\,(a - x)^{m-2}\,\overline{\delta x}^2 \ldots\right]$$

Si l'on fait $x = a$, on trouve dans le premier membre des puissances fractionnaires ou négatives de δa, tandis que le second membre ne procède que par les puissances entières et positives de cette même quantité ; il est donc impossible d'obtenir le développement dans ce cas ; le théorème des dérivées nous prévient de cette impossibilité par une absurdité manifeste. Nous voyons en effet que pour m négatif ou fractionnaire, il y aura des termes du développement de $F(x + \delta x)(a - x - \delta x)^m$, qui auront $(a - x)$ à une certaine puissance ou dénominateur ; ces termes deviennent ∞ pour $x = a$; et rendent ainsi le second membre également infini, tandis que le premier $F(a + \delta a)(\delta a)^m$ reste fini ; ce qui est évidemment absurde.

L'expression *tomber en défaut,* appliquée à ce théorème, est donc complétement impropre ; elle ne lui serait applicable que s'il conduirait à un développement impossible ; mais le cas contraire se présente ici. Son inaptitude à donner le développement cherché, au lieu d'être une preuve contre lui, est donc entièrement en sa faveur, et doit, s'il est possible, nous donner une plus grande confiance dans les résultats auxquels il nous conduit.

APPLICATIONS

DU

THÉORÈME DES DÉRIVÉES.

35. Nous nous occuperons en premier lieu de la recherche des conditions qu'une droite doit remplir pour être tangente à une courbe donnée.

Nous choisissons cette application, parce qu'elle nous conduit à la propriété importante du $\frac{\partial y}{\partial x}$ dont nous avons parlé précédemment.

Soit une courbe quelconque

$$y = \varphi(x)$$

Il s'agit de déterminer les conditions de la droite

$$y' = ax' + b,$$

pour qu'elle soit tangente à cette courbe. Nous accentuons les coordonnées de la droite, afin de les distinguer de celles de la courbe.

La première condition à laquelle une droite doit satisfaire pour être tangente à une courbe, c'est d'avoir un point commun avec cette courbe. Pour le point de tangence, il doit

Digitized by Google

donc y avoir égalité entre les coordonnées de la courbe et celles de la droite; d'où l'on conclut :

$$y - y' = \varphi(x) - ax - b = 0,$$

pour ce point.

Cela posé, il peut se présenter deux cas :

1° Aux environs du point de contact la courbe tourne sa concavité vers l'axe des x.

2° Aux environs du même point elle tourne sa convexité vers le même axe.

1er cas. Si la courbe tourne sa concavité vers l'axe des abscisses, il faut qu'en donnant un même accroissement ou un même décroissement aux x de la courbe et de la droite, l'ordonnée de la droite soit toujours plus grande que l'ordonnée correspondante de la courbe; pourvu que l'on reste aux environs du point de contact.

Mais on a

$$(1)\left\{\begin{array}{l} y \pm \delta y = \varphi(x \pm \delta x) = \\ \varphi(x) \pm \varphi'(x)\,\delta x + \varphi''(x)\dfrac{\overline{\delta x}^2}{2} \pm \varphi'''(x)\dfrac{\overline{\delta x}^3}{2.3} + \dots \\ y' \pm \delta y' = ax \pm a\,\delta x + b.; \end{array}\right.$$

il faut donc qu'on ait aussi :

$$y \pm \delta y - (y' \pm \delta y') =$$

$$\varphi(x) - ax' - b \pm [\varphi'(x) - a]\,\delta x + \varphi''(x)\frac{\overline{\delta x}^2}{2} \pm \dots < 0 \quad (2)$$

mais

$$\varphi(x) - ax' - b = 0$$

il vient par conséquent

$$\pm[\varphi'(x) - a]\,\delta x + \varphi''(x)\frac{\overline{\delta x}^2}{2} \pm \varphi'''(x)\frac{\overline{\delta x}^3}{2.3} + \dots < 0 \quad (3)$$

Cette inégalité doit être satisfaite quelque petite que soit la

valeur de δx ; elle devra donc l'être encore lorsque δx sera assez petit pour que le premier terme l'emporte en grandeur sur l'ensemble des autres termes de la série ; alors le signe de ce premier terme décide de celui de toute la série. Il faut par conséquent que l'on ait

$$\pm [\varphi'(x) - a] \delta x < 0$$

mais quel que soit le signe de l'expression $[\varphi'(x) - a] \delta x$, cette inégalité ne peut être satisfaite. Donc pour que la droite puisse être tangente à la courbe, on devra avoir

$$[\varphi'(x) - a] \delta x = 0$$

mais δx n'est pas égal à 0, par conséquent

$$\varphi'(x) - a = 0$$

d'où

$$\varphi'(x) = \frac{\delta y}{\delta x} = a \qquad (a)$$

l'inégalité (3) devient alors

$$\varphi''(x) \frac{\overline{\delta x}^2}{2} \pm \varphi''(x) \frac{\overline{\delta x}^3}{2.3} + \ldots . < 0$$

Cette égalité doit être également satisfaite pour toutes les valeurs de δx, elle devra donc l'être encore quand cette valeur sera assez petite pour que le signe de toute la série dépende de celui du premier terme, d'où l'on conclut la seconde condition nécessaire

$$\varphi''(x) < 0$$

Si l'on avait aussi

$$\varphi''(x) = 0$$

Pour que la droite pût être tangente il faudrait que l'on eût également

$$\varphi'''(x) = 0$$

et

$$\varphi^{\text{IV}}(x) < 0.$$


Google

En résumé, pour qu'une droite puisse être tangente dans le cas qui nous occupe, il faut qu'elle satisfasse à la condition (a); et, qu'en outre, à partir de la seconde dérivation, la première dérivée qui ne s'annulle pas pour l'abscisse du point de contact, soit négative et de rang pair.

Ainsi dans le premier cas les conditions de tangence sont :

$$[1]\left\{\begin{array}{l}\varphi\ (x) = ax + b\\ \varphi'\ (x) = a\\ \varphi''(x) < 0\end{array}\right.$$

2° CAS. Le second cas ne diffère évidemment du premier que par le signe des expressions (2) et (3); c'est-à-dire que pour des valeurs très-petites de δx, on doit avoir :

$$\pm[\varphi'(x) - a]\,\delta x + \varphi''(x)\frac{\overline{\delta x}^2}{2} \pm \varphi'''(x)\frac{\overline{\delta x}^3}{2.3} + \ldots > 0$$

toujours en supposant que l'on ait

$$y - y' = \varphi(x) - ax - b = 0.$$

Par des raisonnements identiques à ceux du cas précédent, on arrive aux conditions nécessaires :

$$\varphi'(x) = a$$

et

$$\varphi''(x) > 0.$$

Ainsi pour le second cas les conditions de tangence sont :

$$[11]\left\{\begin{array}{l}\varphi\ (x) = ax + b\\ \varphi'\ (x) = a\\ \varphi''(x) > 0\end{array}\right.$$

Si nous rapprochons les conditions [1] des conditions [11], nous voyons qu'elles sont identiques au signe de $\varphi''(x)$ près. Or comme $\varphi''(x)$ est nécessairement > 0 ou < 0, les

Google

conditions de tangence se réduisent aux deux suivantes :

$$\varphi(x) = ax + b$$

$$\varphi'(x) = a$$

Quant au signe de $\varphi''(x)$, il indique simplement dans quel sens la courbe tourne sa concavité aux environs du point de contact. Quand $\varphi''(x) < 0$, elle tourne sa concavité vers l'axe des abscisses, et quand $\varphi''(x) > 0$, elle tourne sa concavité vers cet axe.

Si l'on avait $\varphi''(x) = 0$, pour qu'il y eût tangence il faudrait que l'on eût aussi

$$\varphi'''(x) = 0$$

et

$$\varphi^{\text{IV}}(x) \lessgtr 0,$$

et ainsi de suite.

36. En discutant les conséquences qui découlent de l'égalité $\varphi'(x) = \frac{\delta y}{\delta x} = a$, on voit que le rapport des deux fonctions δy et δx indique toujours la tangente de l'angle que la tangente à la courbe fait avec l'axe des x ; ceci résulte de ce que a marque la valeur de la tangente de l'angle que la droite $y = ax + b$ fait avec cet axe des coordonnées.

Cela posé, si l'on suppose menés par le point de contact deux axes parallèles aux axes primitifs, et que l'on rapporte la tangente à ces nouveaux axes, on voit clairement que le δy marquera toujours l'ordonnée de cette droite dont l'abscisse est δx. Réciproquement, si l'on exprime une ordonnée quelconque de cette droite en fonction de l'ordonnée de la courbe rapportée aux axes primitifs, et l'abscisse correspondante en fonction de l'abscisse du point de contact rapporté aux axes primitifs, le rapport de ces deux fonctions sera toujours égal à $\varphi'(x)$. Par conséquent, quand on a l'équation d'une courbe $y = \varphi(x)$, le $y + \delta y$ ne marque pas l'ordonnée de la courbe

Google

correspondante à l'abscisse $x + \delta x$; comme on le suppose dans le calcul différentiel; mais ces quantités $y + \delta y$ et $x + \delta x$ marquent les coordonnées et les abscisses de la tangente à la courbe au point dont les coordonnées sont x et y.

Cette remarque est de la plus haute importance, parce qu'elle signale l'erreur fondamentale qui a présidé au développement du calcul différentiel, erreur qui est la source de toutes celles dans lesquelles on est tombé sur l'esprit de ce calcul.

Si l'on se représente une droite se mouvant sur une courbe, à laquelle elle reste toujours tangente, on comprendra que la marche de cette droite indiquera toutes les sinuosités ou, si l'on veut, toutes les fluctuations de cette courbe, et qu'elle la suivra dans toutes ses évolutions.

Or quand on connaît les coordonnées de l'un des points d'une droite et la tangente de l'angle qu'elle fait avec l'axe des x, la position de la droite elle-même est déterminée. Il s'ensuit de là que la marche de la droite tangente à la courbe sera indiquée par la tangente de l'angle qu'elle fait avec l'axe des abscisses; mais cette tangente est exprimée par $\varphi'(x)$. Par conséquent les valeurs de la dérivée première d'une courbe indiquent toutes les fluctuations de cette courbe, ce qui justifie complétement la dénomination de fluxion donnée à cette dérivée. La valeur de cette dérivée ou fluxion donne aussi très-approximativement la rapidité avec laquelle croissent les ordonnées aux environs du point de tangence, quand on attribue de très-petits accroissements à l'abscisse.

Les raisonnements qui précèdent semblent ne s'appliquer qu'aux fonctions qui représentent un lieu géométrique; mais pour peu que l'on réfléchisse, on voit qu'ils s'appliquent aussi aux fonctions considérées d'une manière abstraite; car le lieu géométrique n'est en quelque sorte que la matérialisation des phénomènes que présentent les différentes valeurs de cette fonction, quand on y fait varier l'abscisse. D'ailleurs la courbe

Digitized by Google

construite en prenant pour abscisses les valeurs de la variable et pour ordonnées les valeurs correspondantes de la fonction, peut seule nous donner une idée exacte de la marche relative des valeurs de la fonction et de la variable, puisqu'alors seulement on peut embrasser d'un seul coup d'œil l'ensemble de toutes ces valeurs.

Toutes les propriétés que l'on a attribuées aux coefficients différentiels se trouvent ainsi complétement justifiées; on voit aussi, d'après ce qui précède, comment il se fait que les applications du calcul différentiel soient exactes malgré la fausseté des principes sur lesquels on a voulu les baser. C'est qu'en effet ces applications ne sont pas les suites de la théorie du calcul différentiel; ce sont elles au contraire qui ont donné naissance aux principes de ce calcul; car les applications étaient connues avant l'algorithme par lequel on prétendait y arriver. L'exactitude de ces résultats n'est donc pas une preuve en faveur des principes du calcul différentiel, puisque ceux-ci ont été établis en vue de ces résultats, connus préalablement.

Ainsi le calcul des variations, loin de détruire les principes du calcul différentiel, en donne, au contraire, une explication rationnelle, qui corrige certaines erreurs dans lesquelles on était tombé sur l'esprit de ce calcul. De cette manière la science se trouve donc consolidée en même temps qu'elle se simplifie. Car, comme nous le verrons par la suite, c'est toujours le même esprit qui préside à toutes les transformations analytiques qui conduisent à ces beaux résultats que la science signale avec un juste orgueil.

Quand la fluxion première $\varphi'(x)$ est trop compliquée pour que l'on puisse apprécier facilement la rapidité avec laquelle elle croît ou décroît avec x, on prend la dérivée ou la fluxion de cette dérivée ou fluxion première; et l'on obtient ainsi ce que Newton a nommé une fluxion de fluxion. Si la même difficulté se présentait pour la dérivée seconde, on prendrait

Digitized by Google

la dérivée troisième et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on arrive à un résultat d'une appréciation facile. Remarquons toutefois que plus on s'éloigne de la fonction première et plus le degré d'approximation diminue.

Digitized by Google

THÉORIE DES MAXIMA

ET DES

MINIMA DES FONCTIONS.

37. Cette théorie a pour but de trouver la plus grande et la plus petite valeur que puisse prendre une fonction quand on y attribue différentes valeurs à la variable, si la fonction n'en renferme qu'une ; et aux variables si elle en contient plusieurs.

Nous verrons plus loin que la généralité du calcul nous forcera à restreindre la signification des mots *maximum* et *minimum*. Mais nous nous occuperons d'abord de la solution de la question telle qu'elle vient d'être posée.

Soit la fonction

$$y = \varphi(x)$$

dont il faille chercher la valeur maxima, quand on y donne différentes valeurs à x. La valeur de x qui rend y un maximum est nécessairement telle, qu'en donnant à cette valeur de x un accroissement ou un décroissement quelconque la valeur correspondante de la fonction $y = \varphi(x)$ soit toujours plus petite que cette valeur maxima.

Ce caractère va nous conduire aux conditions fondamentales auxquelles doit satisfaire la valeur de x qui rend la fonction $\varphi(x)$ un maximum. Nous avons trouvé, § 32, la formule

$$\varphi(x + \delta x) = \varphi(x) + \varphi'(x)\,\delta x + \varphi''(x)\frac{\overline{\delta x}^2}{2} + \varphi'''(x)\frac{\overline{\delta x}^3}{2.3} + \ldots \quad (1)$$

Digitized by Google

Si au lieu d'attribuer à x l'accroissement δx, on lui donnait l'accroissement $-\delta x$; ou en d'autres termes, si au lieu de donner à x un accroissement δx on lui fait prendre un décroissement quelconque; pour obtenir la valeur correspondante de $\varphi(x)$, il suffira de changer le signe de δx dans la formule (1); ce qui donne :

$$\varphi(x - \delta x) =$$

$$\varphi(x) - \varphi'(x)\,\delta x + \varphi''(x)\,\frac{\overline{\delta x}^2}{2} - \varphi'''(x)\,\frac{\overline{\delta x}^3}{2.3} + \ldots \quad (2)$$

En réunissant les formules (1) et (2) en une seule, on trouve

$$\varphi(x \pm \delta x) =$$

$$\varphi(x) \pm \varphi'(x)\,\delta x + \varphi''(x)\,\frac{\overline{\delta x}^2}{2} \pm \varphi'''(x)\,\frac{\overline{\delta x}^3}{2.3} + \ldots \quad (3)$$

Or, pour le maximum on doit toujours avoir

$$\varphi(x \pm \delta x) < \varphi(x).$$

ou

$$\varphi(x \pm \delta x) - \varphi(x) < 0.$$

en y substituant au lieu de $\varphi(x \pm \delta x)$, la valeur tirée de l'équation (3), on trouve la condition fondamentale du maximum ;

$$\pm\, \varphi'(x)\,\delta x + \varphi''(x)\,\frac{\overline{\delta x}^2}{2} \pm \varphi'''(x)\,\frac{\overline{\delta x}^3}{2.3} + \ldots < 0. \quad (a).$$

Puisque cette inégalité doit être satisfaite pour toutes les valeurs de δx, il faut qu'elle le soit encore quand δx sera assez petit pour rendre la valeur du terme $\varphi'(x)\,\delta x$ à elle seule plus grande que celle de l'ensemble des autres termes de la série. Or, dans ce cas, le signe du premier terme de (a) décide de celui de toute la série; on doit donc avoir,

$$\pm\, \varphi'(x)\,\delta x < 0.$$

Mais cette inégalité ne peut être satisfaite, quel que soit d'ailleurs le signe de $\varphi'(x)\,\delta x$. Par conséquent, pour qu'une certaine valeur de x puisse rendre $\varphi(x)$ un maximum, elle doit satisfaire à l'équation

$$\varphi'(x)\,\delta x = 0,$$

d'où

$$\varphi'(x) = 0.$$

Cette condition transforme l'inégalité fondamentale (a) en la suivante :

$$\varphi''(x)\,\frac{\overline{\delta x}^2}{2} \pm \varphi'''(x)\,\frac{\overline{\delta x}^3}{2.3} + \ldots\ldots < 0. \qquad (a').$$

Laquelle devra être également satisfaite pour toutes les valeurs de δx. Si nous prenons cette valeur assez petite pour faire dépendre le signe de toute la série de celui du premier terme, on devra nécessairement avoir

$$\varphi''(x)\,\frac{\overline{\delta x}^2}{2}. < 0.$$

d'où

$$\varphi''(x) < 0.$$

Telles sont les conditions auxquelles la généralité de la forme $\varphi(x)$ nous permet d'arriver ; ainsi la valeur de x qui rend $\varphi(x)$ un maximum doit satisfaire aux deux conditions :

$$(\mathrm{A}) \left\{ \begin{array}{l} \varphi'(x) = 0 \\ \varphi''(x) < 0. \end{array} \right.$$

Réciproquement la valeur de x qui rend y un minimum est nécessairement telle, qu'en donnant à cette valeur de x un accroissement ou un décroissement quelconque, la valeur correspondante de y soit toujours plus grande que cette valeur minima, d'où l'on conclut pour le minimum

$$\varphi(x \pm \delta x) > \varphi(x),$$

ou

$$\varphi(x \pm \delta x) - \varphi(x) > 0.$$

En substituant pour $\varphi(x \pm \delta x)$ sa valeur tirée de l'équation (3), on trouve la condition fondamentale

$$\varphi(x \pm \delta x) - \varphi(x) =$$

$$\pm \varphi'(x)\,\delta x + \varphi''(x)\,\frac{\overline{\delta x}^2}{2} \pm \varphi'''(x)\,\frac{\overline{\delta x}^3}{2.3} \pm \ldots > 0.$$

En raisonnant sur cette inégalité comme sur la condition fondamentale (*a*) du maximum, on en déduit d'abord

$$\pm \varphi'(x)\,\delta x > 0.$$

Inégalité qui ne peut jamais être satisfaite, on doit donc avoir pour le minimum, comme pour le maximum,

$$\varphi'(x)\,\delta x = 0$$

ou

$$\varphi'(x) = 0.$$

L'inégalité (*b*), devient ainsi :

$$(b'). \qquad + \varphi''(x)\,\frac{\overline{\delta x}^2}{2} \pm \varphi'''(x)\,\frac{\overline{\delta x}^3}{2.3} + \ldots > 0$$

d'où l'on déduit, par un raisonnement identique :

$$\varphi''(x)\,\frac{\overline{\delta x}^2}{2} > 0.$$

ou

$$\varphi''(x) > 0.$$

Ainsi, la valeur de x qui rend la fonction $\varphi(x)$ un minimum, doit satisfaire aux deux conditions :

$$(B) \left\{ \begin{array}{l} \varphi'(x) = 0. \\ \varphi''(x) > 0. \end{array} \right.$$

38. Telles sont les seules conditions auxquelles la généralité



de la fonction $\varphi\,(x)$ nous permette d'arriver. Il est bien prouvé que la valeur de x qui rendra la fonction $\varphi\,(x)$ un maximum doit satisfaire aux conditions (A) du § précédent ; et que celle qui rendra cette fonction un minimum doit remplir les conditions (B) du même paragraphe ; mais on comprend aussi qu'il peut se présenter des cas où il y ait plusieurs valeurs de x qui satisfassent soit aux conditions (A), soit aux conditions (B). Or, il ne peut évidemment y avoir qu'une seule valeur maxima et une seule valeur minima ; il n'y aura donc qu'une seule de ces valeurs de x qui rendra $\varphi\,(x)$ un maximum et une seule de ces valeurs qui la rendra un minimum. Il faut déterminer celle de ces valeurs qui répond à la question proposée. On y parvient aisément en remarquant que celle de ces valeurs de x qui donne la plus grande valeur à la fonction, donne lieu à un maximum ; et celle qui conduit à la plus petite valeur de la fonction donne lieu à un minimum.

Cependant on est convenu de conserver le nom de maximum à toutes les valeurs de $\varphi\,(x)$ correspondantes aux valeurs de x qui satisfont aux conditions (A) ; et celui de minimum à toutes les valeurs de cette fonction qui répondent à celles de x qui remplissent les conditions (B). Mais, comme on le conçoit fort bien, alors la signification des mots maximum et minimum se modifie profondément. Un examen attentif de la question nous fait voir que les conditions (A) et (B) ayant été obtenues pour des valeurs très-petites de δx, on doit entendre par maximum de $\varphi\,(x)$, une valeur de cette fonction telle qu'en donnant à la valeur correspondante de x un accroissement ou un décroissement quelconque, mais très-petit, la fonction $\varphi\,(x)$ prenne toujours une valeur *plus petite* que cette valeur maxima. Au contraire, la fonction $\varphi\,(x)$ aura une valeur minima, lorsqu'en donnant à la valeur correspondante de x un accroissement ou un décroissement quelconque, mais toujours très-petit, le résultat est constamment *plus grand* que cette valeur primitive.

39. Si nous appliquons les considérations des maxima et minima aux lieux géométriques, nous voyons, en comparant les conditions (A) et (B) du § 37 à celles du § 35, que remplir la première condition, commune au maximum et au minimum, revient à rechercher le point pour lequel la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des x. Ceci résulte de l'équation $\varphi'(x) = 0$, qui nous montre en effet que, pour le point maximum et minimum de la courbe, la tangente fait avec l'axe des x un angle nul ou égal à 180°. Quant aux deux autres conditions elles nous font voir que pour le maximum la courbe tourne sa concavité vers l'axe des abscisses, et que pour le minimum elle tourne sa convexité vers le même axe. Ainsi, chercher les maximis et les minimis de l'ordonnée d'une courbe, revient à chercher les points de cette courbe, pour lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses; on distingue ensuite le maximum du minimum par le sens dans lequel la courbe tourne sa concavité; si elle tourne sa concavité vers l'axe des x, il y a maximum; il y a minimum, au contraire, si elle tourne sa convexité vers cet axe des coordonnées. Comme on le voit, cette coïncidence jette un grand jour sur la valeur des mots maximum et minimum.

Il importe de faire ici une observation que nous aurions déjà dû présenter au § 35; voici en quoi elle consiste : quand nous disons, la courbe tourne sa concavité vers l'axe des x, nous entendons par là qu'elle tourne sa concavité du côté des y négatifs, ou mieux, vers une parallèle menée à l'axe des abscisses par un point pris au delà des plus petites valeurs de l'ordonnée. Sans cette précaution l'expression serait impropre ou ne s'appliquerait qu'aux cas où l'on ferait abstraction des valeurs négatives que peut prendre l'ordonnée.

40. Comme seconde application de la théorie des maxima et des minima, prenons le cas d'une fonction de deux variables indépendantes, et demandons-nous quelles sont les conditions

auxquelles doivent satisfaire les valeurs de ces variables, qui rendront la fonction soit un maximum, soit un minimum. On a par conséquent

$$z = \varphi(x, y).$$

Les valeurs de x et de y qui rendront cette fonction un maximum doivent être telles qu'en donnant à chacune de ces variables des accroissements ou des décroissements quelconques et indépendants, la valeur correspondante de z soit toujours plus petite que cette valeur maxima.

Pour obtenir la condition fondamentale qui résulte de ces données, nous devons partir du développement de la fonction $\varphi(x + \delta x, y + \delta y)$. Nous avons obtenu § 32, l'équation,

$$\varphi(x + \delta x, y + \delta y) =$$

$$\varphi(x, y) + \varphi'(x, y)\,\delta x + \varphi''(x, y)\frac{\overline{\delta x}^2}{2} + \dots\dots$$

$$+ \varphi_{,}(x, y)\,\delta y + \varphi_{,}'(x, y)\,\delta x\,\delta y + \dots\dots \quad (1)$$

$$+ \varphi_{,,}(x, y)\frac{\overline{\delta y}^2}{2} + \dots\dots$$

$$+ \dots\dots$$

Mais pour le cas qui nous occupe nous devons avoir le développement de la fonction $\varphi(x \pm \delta x, y \pm \delta y)$, puisque nous avons admis que x et y peuvent prendre des accroissements et des décroissements quelconques. Cette fonction $\varphi(x \pm \delta x, y \pm \delta y)$ présente quatre cas différents, que nous pouvons résumer en une seule formule, en affectant du double signe $\pm$ tous les termes de la série (1), qui peuvent changer de signe, soit par le changement de $+\delta x$ en $-\delta x$, soit par celui de $+\delta y$ en $-\delta y$, soit enfin par le changement simultané de $+\delta x$ et $+\delta y$ en $-\delta x$ et $-\delta y$. Il n'y a évidemment que les termes qui ne renferment que des puissances paires de δx et δy, qui ne chan-

gent de signe dans aucun de ces cas; nous devrons donc écrire

$$\varphi(x \pm \delta x, y \pm \delta y) =$$

$$\varphi(x, y) \pm \varphi'(x, y)\,\delta x + \varphi''(x, y)\,\frac{\overline{\delta x}^2}{2} \pm \ldots\ldots$$

$$\pm \varphi_{,}'(x, y)\,\delta y \pm \varphi_{,}'(x, y)\,\delta x\,\delta y \pm \ldots\ldots \qquad (2)$$

$$+ \varphi_{,,}(x, y)\,\frac{\overline{\delta y}^2}{2} \pm \ldots\ldots$$

$$\pm \ldots\ldots$$

Or, pour la valeur maxima de $\varphi(x, y)$, on doit toujours avoir

$$\varphi(x \pm \delta x, y \pm \delta y) < \varphi(x, y)$$

ou

$$\varphi(x \pm \delta x, y \pm \delta y) - \varphi(x, y) < 0.$$

d'où l'on déduit, en substituant au lieu de $\varphi(x \pm \delta x, y \pm \delta y)$ sa valeur tirée de l'équation (2), la condition fondamentale du maximum

$$\left.\begin{array}{r} \pm \varphi'(x, y)\,\delta x + \varphi''(x, y)\,\dfrac{\overline{\delta x}^2}{2} \pm \ldots\ldots \\ \pm \varphi_{,}(x, y)\,\delta y \pm \varphi_{,}'(x, y)\,\delta x\,\delta y \pm \ldots\ldots \\ + \varphi_{,,}(x, y)\,\dfrac{\delta y^2}{2} \pm \ldots\ldots \\ \pm \ldots\ldots \end{array}\right\} < 0. \qquad (a)$$

Cette inégalité doit être satisfaite pour toutes les valeurs de δx et δy. Elle devra donc l'être encore quand δx et δy auront simultanément des valeurs assez petites pour rendre l'ensemble des deux termes $\varphi'(x, y)\,\delta x$ et $\varphi_{,}(x, y)\,\delta y$, à lui seul plus grand que l'ensemble des autres termes de la série. Alors le signe de ce premier ensemble décidera du signe de toute la série. Pour

qu'il y ait maximum, on devra donc avoir pour ces valeurs de δx et δy,

$$\pm [\varphi'(x, y)\,\delta x + \varphi_{,}(x, y)\,\delta y] < 0.$$

Or, quel que soit le signe de l'expression comprise entre [ ], cette inégalité ne peut être satisfaite. Pour qu'il soit possible de rendre $\varphi\,(x, y)$ un maximum, il faut donc que l'on ait pour de très-petites valeurs de δx et δy,

$$\varphi'(x, y)\,\delta x + \varphi_{,}(x, y)\,\delta y = 0.$$

D'où l'on déduit nécessairement, à cause de l'indépendance des valeurs de δx et de δy, les équations :

$$\varphi'(x, y) = 0$$

$$\varphi_{,}(x, y) = 0.$$

L'inégalité (a) devient ainsi :

$$\left.\begin{array}{r} +\,\varphi''(x, y)\,\dfrac{\overline{\delta x}^2}{2} \pm \varphi'''(x, y)\,\dfrac{\overline{\delta y}^3}{2.3} + \ldots\ldots \\ \pm\,\varphi_{,}'(x, y)\,\delta x\,\delta y \pm \varphi_{,}''(x, y)\,\dfrac{\overline{\delta x}^2\,\delta y}{2} + \ldots\ldots \\ +\,\varphi_{,,}(x, y)\,\dfrac{\overline{\delta y}^2}{2} \pm \varphi'_{,,}(x, y)\,\dfrac{\delta x\,\overline{\delta y}^2}{2} + \ldots\ldots \\ \pm\,\varphi_{,,,}(x, y)\,\dfrac{\overline{\delta y}^3}{2.3} + \ldots\ldots \\ + \ldots\ldots \end{array}\right\} < 0. \qquad (a)$$

Cette inégalité devant être également satisfaite pour toutes les valeurs de δx et de δy, devra l'être encore quand δx et δy seront assez petits pour faire dépendre le signe de toute la série du signe des trois premiers termes ; on doit donc avoir :

$$\varphi''(x, y)\,\frac{\overline{\delta x}^2}{2} \pm \varphi_{,}'(x, y)\,\delta x\,\delta y + \varphi_{,,}(x, y)\,\frac{\overline{\delta y}^2}{2} < 0. \qquad (b)$$

Quoique nous ayons pris δx et δy très-petits, ces deux quantités pourront cependant prendre toutes les valeurs relatives imaginables. Si nous supposons donc que δx prenne une valeur relative assez grande pour faire dépendre le signe du trinome (*b*) du signe du terme en $\overline{\delta x}^2$, cette inégalité devant encore être satisfaite dans ce cas, on doit nécessairement avoir

$$\varphi''(x, y)\frac{\overline{\delta x}^2}{2} < 0,$$

d'où

$$\varphi''(x, y) < 0.$$

De même si nous donnons à δy une valeur relative très-grande, nous sommes conduit à la condition nécessaire

$$\varphi_2(x, y)\frac{\overline{\delta y}^2}{2} < 0,$$

d'où

$$\varphi_2(x, y) < 0.$$

Mais ces conditions ne suffisent pas encore; car pour que le trinome (*b*) reste toujours négatif, il faut en outre que le signe du second terme $\pm\varphi_1'(x, y)\,\delta x\,\delta y$ ne puisse pas faire changer le signe de cette expression; ce qui exige que l'on ait toujours

$$\varphi''(x, y)\frac{\overline{\delta x}^2}{2} + \varphi_2(x, y)\frac{\overline{\delta y}^2}{2} > \varphi_1'(x, y)\,\delta x\,\delta y,$$

ou

$$\varphi''(x, y)\frac{\overline{\delta x}^2}{2} - \varphi_1'(x, y)\,\delta x\,\delta y + \varphi_2(x, y)\frac{\overline{\delta y}^2}{2} > 0.$$

Or, pour que cette expression reste constamment > 0, il faut que l'égalité

$$\varphi''(x, y)\frac{\overline{\delta x}^2}{2} - \varphi_1'(x, y)\,\delta x\,\delta y + \varphi_2(x, y)\frac{\overline{\delta y}^2}{2} = 0 \qquad (c)$$

ne puisse jamais être satisfaite. Il faut donc que, résolue par rapport à $\frac{\delta x}{\delta y}$, elle ne donne jamais que des valeurs imaginaires

pour ce rapport. Or l'équation (c) revient à la suivante :

$$\varphi''(x, y) \frac{\overline{\delta x^2}}{\overline{\delta y^2}} - 2\, \varphi_{\prime}'(x, y) \frac{\delta x}{\delta y} + \varphi_{2}(x, y) = 0,$$

ou

$$\left(\frac{\delta x}{\delta y}\right)^2 - 2.\frac{\varphi_{\prime}'(x, y)}{\varphi''(x, y)}.\frac{\delta x}{\delta y} + \frac{\varphi_{2}(x, y)}{\varphi''(x, y)} = 0.$$

En résolvant cette dernière, on en tire

$$\frac{\delta x}{\delta y} = \frac{\varphi_{\prime}'(x, y)}{\varphi''(x, y)} \pm \sqrt{\frac{\overline{\varphi_{\prime}'(x, y)}^2}{\overline{\varphi''(x, y)}^2} - \frac{\varphi_{2}(x, y)}{\varphi''(x, y)}}. =$$

$$\frac{\varphi_{\prime}'(x, y)}{\varphi''(x, y)} \pm \frac{1}{\varphi''(x, y)} \sqrt{\overline{\varphi_{\prime}'(x, y)}^2 - \varphi''(x, y).\ \varphi_{2}(x, y)}$$

Pour que ces racines soient imaginaires, on doit avoir

$$\varphi''(x, y).\ \varphi_{2}(x, y) > \overline{\varphi_{\prime}'(x, y)}^2.$$

Cette condition devra donc être aussi satisfaite pour qu'il puisse y avoir maximum. En résumé, les conditions auxquelles doivent satisfaire les valeurs de x et y qui rendront $\varphi(x, y)$ un maximum, sont :

$$\begin{matrix} \varphi'(x, y) = 0 & \varphi''(x, y) < 0 \\ \varphi_{\prime}(x, y) = 0 & \varphi_{2}(x, y) < 0 \end{matrix} \quad \text{et } \varphi''(x, y).\ \varphi_{2}(x, y) > \overline{\varphi_{\prime}'(x, y)}^2.$$

Pour la valeur minima de la fonction $\varphi(x, y)$, on doit avoir

$$\varphi(x \pm \delta x, y \pm \delta y) > \varphi(x, y),$$

d'où

$$\varphi(x \pm \delta x, y \pm \delta y) - \varphi(x, y) > 0.$$

Substituant au lieu de $\varphi(x \pm \delta x, y \pm \delta y)$ sa valeur tirée de l'équation (2), on trouve comme condition fondamentale pour l'existence d'un minimum :

$$\left.\begin{array}{r}\pm \varphi'(x,y)\,\delta x + \varphi''(x,y)\dfrac{\overline{\delta x}^2}{2} \pm \ldots\ldots \\ \pm \varphi_{,}(x,y)\,\delta y \pm \varphi_{,}'(x,y)\,\delta x\,\delta y \pm \ldots\ldots \\ + \varphi_{2}(x,y)\dfrac{\overline{\delta y}^2}{2} \pm \ldots\ldots \\ \pm \ldots\ldots\end{array}\right\} > 0. \quad (d)$$

D'où l'on déduit, par des raisonnements identiques à ceux qui nous ont conduit aux conditions du maximum, d'abord

$$\pm [\varphi'(x,y)\,\delta x + \varphi_{,}(x,y)\,\delta y] > 0.$$

Cette inégalité ne pouvant être satisfaite, on doit avoir pour le minimum comme pour le maximum

$$\varphi'(x,y)\,\delta x + \varphi_{,}(x,y)\,\delta y = 0,$$

d'où

$$\varphi'(x,y) = 0, \qquad \varphi_{,}(x,y) = 0.$$

On tire ensuite de (d) la seconde condition

$$\varphi''(x,y)\frac{\overline{\delta x}^2}{2} \pm \varphi_{,}'(x,y)\,\delta x\,\delta y + \varphi_{2}(x,y)\frac{\overline{\delta y}^2}{2} > 0,$$

d'où

$$\varphi''(x,y) > 0, \qquad \varphi_{2}(x,y) > 0.$$

Il faut, de plus, que

$$\varphi''(x,y)\frac{\overline{\delta x}^2}{2} + \varphi_{2}(x,y)\frac{\overline{\delta y}^2}{2} > \varphi_{,}'(x,y)\,\delta x\,\delta y.$$

Ce qui nous conduit comme pour le maximum à la condition

$$\varphi''(x,y).\,\varphi_{2}(x,y) > \overline{\varphi_{,}'(x,y)}^2.$$

En résumant les conditions auxquelles doivent satisfaire les valeurs de x et y qui rendent $\varphi(x, y)$ un minimum, on trouve

$$\begin{array}{lll}\varphi'(x,y) = 0 & \varphi''(x,y) > 0 & \\ & & \varphi''(x,y)\,\varphi_{2}(x,y) > \overline{\varphi_{,}'(x,y)}^2 \\ \varphi_{,}(x,y) = 0 & \varphi_{2}(x,y) > 0 & \end{array}$$

L'observation du § 38 doit s'appliquer également au cas dont nous venons d'obtenir la solution, c'est-à-dire qu'il faut y restreindre la portée des mots maximum et minimum, en ce sens que les conditions que l'on vient d'obtenir ne s'appliquent qu'aux cas où l'on considère x et y comme recevant des accroisements très-petits.

En regardant $y = \varphi(x)$ comme l'équation d'une courbe, et en rapprochant cette équation de celle d'une droite quelconque, $y = ax + b$, les considérations du § 35 nous ont conduit aux conditions auxquelles doit satisfaire une droite pour être tangente à cette courbe. Si, par analogie, nous regardions $z = \varphi(x, y)$ comme le lieu géométrique d'une surface, et que nous rapprochions cette équation de l'équation générale du plan $Ax + By + Cz = D$, des considérations identiques nous conduiraient aux conditions à remplir par un plan pour être tangent à cette surface. En comparant ces conditions à celles du maximum et du minimum, nous en tirons ces conséquences remarquables :

1° Les conditions communes aux maxima et aux minima prouvent que chercher les valeurs de x et de y qui rendent $\varphi(x, y)$ soit un maximum, soit un minimum, revient à rechercher les points pour lesquels *le plan tangent à la surface* $z = \varphi(x, y)$ *est parallèle au plan des* xy.

2° Les conditions qui distinguent le cas du maximum de celui du minimum, démontrent qu'il y a *maximum* quand, aux environs du point de contact, *la surface tourne sa concavité vers le plan des* xy; et qu'il y a *minimum* quand, vers ce point, *la surface tourne sa convexité du côté de ce même plan des coordonnées.*

Ces propriétés font connaître d'une manière claire et précise la nature et les caractères du maximum et du minimum.

Avant de terminer l'exposé de ce qui est relatif à la théorie des maxima et des minima, il nous reste à faire quelques remar-

ques qui offrent assez d'importance dans les applications de cette théorie. L'égalité $a = b$ marquant le passage du cas $a > b$ à celui où l'on a $a < b$, et réciproquement, nous devons en conclure que le signe d'égalité (=) participe à la fois de la nature des deux signes d'inégalités (>) et (<). Ainsi, quand dans un cas particulier on trouve $\varphi''(x, y) = 0$, au lieu de $\varphi''(x, y) < 0$, si l'on veut s'assurer de l'existence ou de la non-existence d'un maximum, on n'en doit pas moins continuer les investigations, car si pour deux valeurs simultanées de x et de y on avait

$$\varphi''(x, y) = 0,$$

et

$$\varphi_2(x, y) < 0,$$

les autres conditions du maximum étant d'ailleurs satisfaites, on devrait en conclure l'existence d'un maximum pour ces valeurs de variables. De même que l'on devrait conclure à l'existence d'un minimum, si l'on avait simultanément

$$\varphi''(x, y) = 0,$$

et

$$\varphi_2(x, y) > 0,$$

toujours en supposant que ces valeurs de x et de y satisfassent aux autres conditions du minimum. Inutile d'ajouter que cette remarque s'applique aux cas où l'on aurait :

Soit

$$\varphi''(x, y) < 0$$

en même temps que

$$\varphi_2(x, y) = 0.$$

Soit

$$\varphi''(x, y) > 0$$

et

$$\varphi_2(x, y) = 0.$$

Il peut arriver aussi que l'on ait

$$\varphi''(x, y) . \varphi_2(x, y) = \overline{\varphi_1'(x, y)}^2,$$

ce qui n'empêche pas les valeurs de x et de y qui satisfont à cette égalité de pouvoir encore donner lieu à un maximum ou à un minimum.

Remarquons, en terminant ce chapitre, qu'aussitôt que l'une des dérivées $\varphi''(x, y)$ ou $\varphi_2(x, y)$ est nulle, pour qu'il puisse y avoir maximum ou minimum il faut que $\varphi_1'(x, y) = 0$; car, sinon, il serait impossible de satisfaire à la cinquième condition, commune au maximum et au minimum.

Digitized by Google

DU CONTACT

ET DE

L'OSCULATION DES COURBES PLANES.

41. Les considérations du § 35, étendues aux courbes planes, nous conduisent immédiatement à la théorie du contact et de l'osculation de cette espèce de lieu géométrique. On dit que deux courbes se touchent lorsqu'elles ont un point commun aux environs duquel tous les points de l'une des courbes restent d'un même côté, relativement à ceux de l'autre courbe. En d'autres termes, deux courbes se touchent, quand elles ont un point commun et qu'elles sont tellement situées, qu'en donnant à l'abscisse de ce point un accroissement ou un décroissement quelconque, mais très-petit, l'ordonnée correspondante de l'une des courbes soit constamment plus grande ou plus petite que l'ordonnée correspondante de l'autre.

Soient

$$\text{(A)} \quad y = \varphi(x)$$

et

$$\text{(B)} \quad y' = f(x),$$

les équations de deux courbes, pour lesquelles il s'agit de trouver les conditions de contact. Nous accentuons l'ordonnée de la courbe (B) pour la distinguer de celle de (A); quant aux abscisses, il est inutile de les distinguer, puisque nous allons considérer les modifications qu'éprouvent les ordon-

Digitized by Google

nées de ces courbes sous des valeurs communes de l'abscisse.

D'après la définition qui vient d'être donnée, de deux courbes qui se touchent, il faut, en premier lieu, qu'elles aient un point commun ; on aura donc pour le point de contact

$$y - y' = \varphi(x) - f(x) = 0. \quad [1]$$

Il faut de plus qu'en donnant à l'abscisse de ce point un accroissement ou un décroissement quelconque, mais très-petit, l'ordonnée correspondante de l'une des courbes soit constamment plus grande que celle de l'autre. Supposons l'ordonnée de la courbe (A) plus grande que celle de la courbe (B). Puisque

$$y_{x \pm \delta x} = \varphi(x \pm \delta x) = \varphi(x) \pm \varphi'(x)\,\delta x + \varphi''(x)\,\frac{\overline{\delta x}^2}{2} \pm \ldots$$

et

$$y'_{x \pm \delta x} = f(x \pm \delta x) = f(x) \pm f'(x)\,\delta x + f''(x)\,\frac{\overline{\delta x}^2}{2} \pm \ldots$$

nous aurons

$$(a) \qquad y_{x \pm \delta x} - y'_{x \pm \delta x} =$$

$$\varphi(x) - f(x) \pm [\varphi'(x) - f'(x)]\,\delta x + [\varphi''(x) - f''(x)]\,\frac{\overline{\delta x}^2}{2} \pm \ldots > 0.$$

Or, d'après l'équation (1) on a l'égalité $\varphi(x) - f(x) = 0$. La condition principale (a) devient donc

$$(b) \qquad y_{x \pm \delta x} - y'_{x \pm \delta x} =$$

$$\pm [\varphi'(x) - f'(x)]\,\delta x + [\varphi''(x) - f''(x)]\,\frac{\overline{\delta x}^2}{2} \pm \ldots > 0.$$

Mais si nous prenons δx suffisamment petit, nous pourrons faire dépendre le signe de cette série de celui du premier terme en δx, on devra donc avoir :

$$\pm [\varphi'(x) - f'(x)]\,\delta x > 0.$$

Or, quel que soit le signe de ce produit, cette condition ne

peut être satisfaite. Il faut donc, pour que le contact soit possible, que l'on ait

$$[\varphi'(x) - f'(x)]\,\delta x = 0$$

ou

$$\varphi'(x) - f'(x) = 0$$

d'où

$$\varphi'(x) = f'(x). \quad [2].$$

Si nous cherchons la traduction géométrique de cette équation, nous voyons, d'après le § 55, qu'elle indique que pour le point de contact, la tangente est commune aux deux courbes. Réciproquement si la tangente est commune aux deux courbes, il est facile de prouver que ces deux courbes se touchent, sauf les exceptions qui seront établies ci-après. En effet, dans ce cas les égalités [1] et [2] étant satisfaites à priori, on trouve pour la différence entre les ordonnées de ces courbes

$$[\varphi''(x) - f''(x)]\frac{\overline{\delta x}^2}{2} \pm [\varphi'''(x) - f'''(x)]\frac{\overline{\delta x}^3}{2.3} + \ldots.$$

Or, suivant le signe de $[\varphi''(x) - f''(x)]$, cette différence sera constamment positive ou négative, quand on donnera à δx des valeurs quelconques, mais suffisamment petites; c'est-à-dire qu'aux environs du point de contact l'ordonnée de l'une des courbes sera toujours plus petite ou plus grande que celle de l'autre; c'est précisément ce qui constitue la seconde condition de tangence. Ainsi quand les courbes se touchent elles ont une tangente commune, et réciproquement quand elles ont une tangente commune, en un point commun, elles se touchent. Il s'ensuit nécessairement que si deux courbes se touchent et qu'une troisième courbe soit tangente à l'une d'elles, elle sera aussi tangente à l'autre, toujours en supposant que tout se passe autour d'un même point commun à toutes ces courbes.

La condition [2] transforme l'inégalité fondamentale (*b*) en la suivante :

$$(c) \quad [\varphi''(x) - f''(x)]\frac{\overline{\delta x}^2}{2} \pm [\varphi'''(x) - f'''(x)]\frac{\overline{\delta x}^3}{2.3} + \ldots > 0.$$

Cette condition sera toujours satisfaite pour de très-petites valeurs de δx, aussi longtemps que $[\varphi''(x) - f''(x)]$ conservera une valeur déterminée ; mais si l'on avait

$$\varphi''(x) - f''(x) = 0$$

ou

$$\varphi''(x) = f''(x) \quad [3]$$

ce qui donne pour (c)

$$(d) \quad \pm [\varphi'''(x) - f'''(x)] \frac{\overline{\delta x}^3}{2.3} + [\varphi^{\text{IV}}(x) - f^{\text{IV}}(x)] \frac{\overline{\delta x}^4}{2.3.4} \pm \ldots > 0,$$

les courbes cesseraient d'être tangentes, comme le prouve cette dernière inégalité. Mais dans ce cas, les courbes ne se coupent pas à la manière ordinaire, puisque, pour le point d'intersection, la tangente leur est commune, et que de plus elles tournent leur concavité dans le même sens. Cette dernière circonstance était restée arbitraire, par les conditions [1] et [2], tel que le prouve la fig. 1, dans laquelle AB, CD, EF représentent des parties de courbes qui se touchent en T.

Lorsque deux courbes satisfont aux conditions [1], [2] et [3] on dit généralement qu'elles ont *un contact du second ordre*. Mais cette dénomination est tout à fait impropre, puisque dans ce cas les courbes au lieu de se toucher se coupent. Il y aurait encore contact entre ces courbes, si l'on avait de plus

$$\varphi'''(x) = f'''(x) \quad [4]$$

Alors seulement il serait permis de dire qu'il y a contact du 2e ordre, en supposant que l'on veuille distinguer ce cas de celui où l'on a simplement

$$\varphi'(x) = f'(x).$$

On donne encore aux courbes qui satisfont aux conditions [1], [2] et [3] le nom *de courbes osculatrices*. Cette qualification est le résultat d'une grave erreur qui consiste à considérer

ces courbes comme se confondant ou s'embrassant dans une petite partie de leur parcours. Cette erreur est d'autant plus inconcevable que l'examen le plus superficiel de l'inégalité (*d*) montre, à l'évidence, que ces deux courbes ne se confondent qu'au point $\delta x = 0$; car aussitôt que δx prend une certaine valeur, quelque petite qu'elle soit d'ailleurs, les deux courbes se séparent puisque leurs ordonnées prennent des valeurs différentes. D'après cela on voit clairement que la qualification d'osculatrice ne peut leur être appliquée.

Je crois qu'il conviendrait mieux de donner à ces courbes la dénomination de *concomitantes,* puisqu'aux environs du point d'intersection ces deux courbes marchent en quelque sorte de conserve; cette idée se trouve très-bien rendue par le sens du mot concomitance. Cette dénomination me paraît d'autant plus admissible, que dans la seule application où l'on fasse usage de l'osculation ou de la concomitance, c'est-à-dire dans la recherche du rayon de courbure, le cercle qui donne ce rayon est véritablement le *cercle concomitant* de la courbe, puisqu'il accompagne celle-ci considérée comme principale, et se modifie d'après sa nature, tandis qu'il n'en est pas du tout le cercle osculateur.

Quand avec les conditions [1], [2], [3] et [4] on a encore l'égalité

$$\varphi^{\text{iv}}(x) = f^{\text{iv}}(x) \quad [5],$$

les courbes qui donnent ce résultat sont encore des courbes concomitantes; mais comme elles se rapprochent beaucoup plus l'une de l'autre que celles pour lesquelles les conditions [1], [2] et [3] sont seules satisfaites, on peut les distinguer de celles-ci, en disant qu'il y a *concomitance du second ordre.*

En continuant de la sorte on arrivera à des contacts et des concomitances du 3e, 4e . . . . ordre. Le tableau suivant rend

un compte exact de toutes les relations qui existent entre ces espèces de courbes, ainsi quand

$$\varphi(x) = f(x) \quad \text{il y a intersection simple;}$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x) = f(x)\\ \varphi'(x) = f'(x)\end{array}\right\} \text{il y a contact du } 1^{\text{er}} \text{ ordre;}$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x) = f(x)\\ \varphi'(x) = f'(x)\\ \varphi''(x) = f''(x)\end{array}\right\} \text{il y a concomitance du } 1^{\text{er}} \text{ ordre;}$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x) = f(x)\\ \varphi'(x) = f'(x)\\ \varphi''(x) = f''(x)\\ \varphi'''(x) = f'''(x)\end{array}\right\} \text{il y a contact du } 2^{\text{e}} \text{ ordre;}$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x) = f(x)\\ \varphi'(x) = f'(x)\\ \varphi''(x) = f''(x)\\ \varphi'''(x) = f'''(x)\\ \varphi^{\text{IV}}(x) = f^{\text{IV}}(x)\end{array}\right\} \text{il y a concomitance du } 2^{\text{e}} \text{ ordre;}$$

. . . .

et ainsi de suite ; ce tableau donne alternativement un contact et une concomitance.

Cette manière d'exposer la théorie du contact des courbes me paraît plus simple et plus claire, que la méthode que l'on suit généralement, parce qu'elle rend un compte exact de toutes les relations qui existent entre ces lieux géométriques. Comme je l'ai dit plus haut j'ai cru devoir rejeter le mot osculation parce que dans la question qui nous occupe, il exprime une idée éminemment fausse. On me dira, peut-être, que j'aurais

Digitized by Google

pu conserver le mot, en modifiant l'idée qu'il doit présenter à notre esprit. Cette façon de procéder peut être admise, quand il s'agit d'un mot qui n'a par lui-même aucune signification ; mais il n'en est pas de même quand il est question d'un mot qui, comme l'osculation, représente une idée bien déterminée. D'ailleurs le mot étant soumis à la pensée, il faut qu'il change quand l'idée qu'il représente se modifie. S'il n'est pas aussi nécessaire que l'idée change quand les mots diffèrent, il serait du moins à souhaiter qu'il en fût ainsi dans le langage.

42. La théorie du contact des courbes n'a par elle-même aucune importance pratique ; mais elle conduit à des résultats qui méritent au plus haut point de fixer notre attention. Pour nous rendre bien compte de la marche des idées qui ont conduit à ces résultats, figurons-nous deux courbes concomitantes en un point. Soient, par exemple, AB et CD (fig. 2) deux parties de courbes concomitantes au point T. Il est clair d'abord qu'aux environs du point T, c'est-à-dire pour des valeurs très-petites de δx, ces deux courbes dévient excessivement peu de la ligne droite qui leur est tangente, ou, si on le préfère, les courbures de ces lieux géométriques, aux environs de ce point T, diffèrent très-peu ; en second lieu, la courbure de l'une de ces courbes CD est en quelque sorte une moyenne entre celles des deux branches TA et TB de l'autre, puisque cette courbure est plus petite que celle de la branche TB et plus grande que celle de TA. Or la courbure de AB au point T participe évidemment de celles des deux branches TA et TB ; il s'ensuit que si l'on avait une idée exacte de la courbure de CD au point T on aurait une idée très-approximative de celle de AB au même point. Je crois inutile de faire observer que la courbure d'une courbe résulte, et de la rapidité avec laquelle cette courbe s'écarte de la tangente, et de la manière dont cet écartement s'effectue.

Le problème de l'appréciation de la courbure des lieux

Digitized by Google

géométriques se trouve ainsi ramené à la recherche d'une courbe de la courbure de laquelle on ait une idée bien exacte et qui soit de nature telle que l'on puisse toujours établir entre elle et une courbe quelconque une concomitance du premier ordre. Or, parmi toutes les courbes que l'on peut tracer, il n'y a que le cercle qui ait dans toute son étendue une courbure uniforme dont on se fait une idée bien exacte quand on connaît son rayon, puisque cette courbure est en raison inverse du rayon. Plus le rayon est grand et plus la courbure est petite et réciproquement. Voyons si la seconde condition, celle de la possibilité d'établir une concomitance du premier ordre entre un cercle et une courbe quelconque, se trouve remplie.

Nous savons, § 46, que pour la concomitance du premier ordre les conditions [1], [2] et [3] doivent être satisfaites. Or si l'on prend l'équation générale du cercle

$$(x-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2=\rho^2,$$

on voit qu'il sera toujours possible de satisfaire à ces conditions, puisqu'elle renferme trois quantités α, β et ρ de la valeur desquelles on peut disposer à volonté, sans que la courbe que cette équation représente cesse d'être un cercle. En cherchant les valeurs de α, β et ρ qui satisfont à ces conditions, on trouve en général

$$\alpha = x - \frac{\varphi'(x)\,[1+\overline{\varphi'(x)}^2]}{\varphi''(x)} \quad (a), \qquad \beta = \varphi(x) - \frac{1+\overline{\varphi'(x)}^2}{\varphi''(x)}. \quad (b)$$

$$\rho = \frac{[1+\overline{\varphi'(x)}^2]^{\frac{3}{2}}}{\varphi''(x)}. \quad (c)$$

$y' = \varphi(x)$ représentant l'équation de la courbe que l'on considère. Pour s'en assurer il suffit de faire

$$f(x) = \beta \pm \sqrt{\rho^2-(\alpha-x)^2}$$

dans les équations [1], [2] et [3], et de résoudre ces équations par rapport à α, β et ρ.

Il est facile de prouver que le cercle concomitant est celui de toutes les courbes de la même espèce, passant par le point T, qui se rapproche le plus de la courbe donnée. D'abord l'inégalité (*b*) du § 46, comparée à l'inégalité (*c*) du même paragraphe, démontre qu'aux environs du point T les cercles qui ont un contact du premier ordre avec cette courbe se rapprochent plus de celle-ci que ceux qui la coupent, car pour des valeurs très-petites de δx la série (*b*) prend des valeurs beaucoup plus considérables que la série (*c*). En second lieu l'inégalité (*c*), comparée à l'inégalité (*d*) du § 46, prouve que parmi tous les cercles cotangents au point T celui qui est le concomitant de la courbe se rapproche de celle-ci plus que tous les autres. Par conséquent la courbure du cercle concomitant est celle qui donne l'idée la plus approximative de la courbure de la courbe. D'ailleurs, comme nous l'avons dit plus haut, la courbure du cercle concomitant se rapproche excessivement de celle de la courbe. Mais nous l'avons déjà dit et nous le répétons, le cercle concomitant ne donne pas une idée exacte mais bien une idée approximative de la courbure de la courbe. Il n'y a que la courbe elle-même qui puisse donner une notion exacte de sa courbure, car chaque lieu géométrique a un mode de courbure qui lui est propre et qu'aucune autre courbe ne peut rendre.

Si nous supposons que $f(x) = y$ représente l'équation du cercle, nous pourrons exprimer la différence entre les ordonnées d'une courbe et celle de son cercle concomitant, comme suit :

$$+ [\varphi'''(x) - f'''(x)] \frac{\overline{\delta x}^3}{2.3} + [\varphi^{\text{IV}}(x) - f^{\text{IV}}(x)] \frac{\overline{\delta x}^4}{2.3.4} + \cdots$$

en supposant δx positif. Or, pour les valeurs suffisamment petites de δx le signe de cette série dépendra de celui de son premier terme ; d'où l'on conclut que si

$$\varphi'''(x) - f'''(x) > 0,$$

la courbure de la courbe va en diminuant quand les abscisses augmentent, puisqu'alors le cercle concomitant prend par rapport à la courbe la même position relative que AB se trouve avoir par rapport à CD [fig. 2].

Si l'on a au contraire

$$\varphi'''(x) - f'''(x) < 0,$$

la courbure de la courbe croit avec les abscisses, puisqu'alors le cercle prend par rapport à la courbe la même position que CD par rapport à AB.

Nous savons que α et β représentent les coordonnées du centre du cercle concomitant. Il est évident que ces coordonnées varieront avec le point de la courbe par lequel ce cercle aura été mené. Si l'on suppose éliminé x entre les équations (*a*) et (*b*) qui donnent la valeur de α et de β, on obtient, entre ces dernières quantités, une équation qui est le lieu géométrique de tous les centres des cercles concomitants menés par les différents points de la courbe donnée. Ce lieu géométrique est une courbe qui a reçu le nom de *développée* de la courbe principale. Cette développée jouit d'une foule de propriétés que nous nous contenterons de signaler ici, en renvoyant, pour leur discussion, aux traités d'analyse où cette théorie est généralement exposée avec beaucoup de lucidité.

1° Le centre de tout cercle concomitant d'une courbe se trouve sur la développée de cette courbe;

2° Toute normale à une courbe est tangente à la développée; et réciproquement toute tangente à la développée est normale à la développante;

3° Quand on connait un point d'une courbe et sa développée, on détermine aisément les autres points de cette courbe, etc.

Nous ne nous occuperons pas non plus de la théorie des points singuliers, car cette question ne présente aucune difficulté. Nous n'avons d'ailleurs rien de nouveau à dire à cet

égard ; on pourra donc recourir aux traités d'analyse si l'on désire connaître ce qui est relatif à cette théorie.

45. Il nous resterait à étendre les mêmes considérations aux courbes à double courbure, et aux surfaces courbes quelconques, mais ces considérations nous demanderaient trop de temps, et ne jetteraient aucun jour nouveau sur la question ; car les procédés sont identiques à ceux que nous avons adoptés pour les courbes planes.

Digitized by Google

VÉRITABLE VALEUR

DES FRACTIONS

QUI SE PRÉSENTENT SOUS LA FORME $\frac{0}{0}$.

44. On rencontre souvent en mathématique des fractions dont les deux termes s'annulent quand on attribue une certaine valeur particulière à la variable. Telle serait, par exemple, la fraction $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$, pour laquelle on aurait $F(a) = 0$ et $\varphi(a) = 0$, a désignant une valeur particulière de x. L'objet de ce chapitre est de rechercher la véritable valeur de ces fractions, sous ces valeurs particulières de la variable.

Le moyen d'évaluation qui s'est la plus naturellement présenté à l'esprit des mathématiciens, consiste à attribuer un accroissement δx à x avant de faire $x = a$ dans les fonctions $F(x)$ et $\varphi(x)$. De cette manière on peut voir par quelles transformations la fraction prend la forme $\frac{0}{0}$, quand x devient égal à a.

On trouve, en appliquant la formule des dérivées,

$$\frac{F(x + \delta x)}{\varphi(x + \delta x)} = \frac{F(x) + F'(x)\,\delta x + F''(x)\,\frac{\overline{\delta x}^2}{2} + \ldots}{\varphi(x) + \varphi'(x)\,\delta x + \varphi''(x)\,\frac{\overline{\delta x}^2}{2} + \ldots}$$

Digitized by Google

Puisque, par hypothèse, on a $F(a) = 0$ et $\varphi(a) = 0$, on trouve, en faisant dans cette égalité $x = a$,

$$\frac{F(a+\delta a)}{\varphi(a+\delta a)} = \frac{F'(a)\,\delta a + F''(a)\frac{\overline{\delta a}^2}{2} + \ldots}{\varphi'(a)\,\delta a + \varphi''(a)\frac{\overline{\delta a}^2}{2} + \ldots} =$$

$$\frac{F'(a) + F''(a)\frac{\delta a}{2} + \ldots}{\varphi'(a) + \varphi''(a)\frac{\delta a}{2} + \ldots} \quad (1).$$

Cette dernière équation devant être satisfaite pour toutes les valeurs de δa, on en déduit, en posant $\delta a = 0$,

$$\frac{F(a)}{\varphi(a)} = \frac{F'(a)}{\varphi'(a)}. \quad (2)$$

Telle sera la véritable valeur cherchée, à moins que l'on n'ait aussi $F'(a) = 0$ en même temps que $\varphi'(a) = 0$; dans ce cas l'équation (1) devient

$$\frac{F(a+\delta a)}{\varphi(a+\delta a)} = \frac{F''(a)\frac{\delta a}{2} + F'''(a)\frac{\overline{\delta a}^2}{2.3} + \ldots}{\varphi''(a)\frac{\delta a}{2} + F'''(a)\frac{\overline{\delta a}^2}{2.3} + \ldots} =$$

$$\frac{F''(a) + F'''(a)\frac{\delta a}{3} + \ldots}{\varphi''(a) + \varphi'''(a)\frac{\delta a}{3} + \ldots}$$

D'où l'on conclut pour $\delta a = 0$

$$\frac{F(a)}{\varphi(a)} = \frac{F''(a)}{\varphi''(a)}.$$

Si l'on avait de plus $F''(a) = 0$ et $\varphi''(a) = 0$, l'équation (1) nous conduirait à l'égalité

$$\frac{F(a)}{\varphi(a)} = \frac{F'''(a)}{\varphi'''(a)}$$

et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on arrive à deux dérivées simultanées dont le rapport ait une valeur finie. Si nous représentons par n l'ordre de la dérivation qui donne cette valeur finie, nous pourrons écrire d'une manière générale

$$\frac{F(a)}{\varphi(a)} = \frac{F^n(a)}{\varphi^n(a)}.$$

Il peut se présenter trois cas.

1° La n^e dérivée du numérateur peut être nulle tandis que la dérivée correspondante du dénominateur prend une valeur finie; dans ce cas la véritable valeur de la fraction est zéro, on trouve en effet

$$\frac{F(a)}{\varphi(a)} = \frac{F^n(a)}{\varphi^n(a)} = \frac{0}{\varphi^n(a)} = 0.$$

2° Réciproquement la n^e dérivée du dénominateur peut encore être nulle tandis que la dérivée correspondante du numérateur prend une valeur finie; dans ce cas la véritable valeur cherchée est infinie; toujours en supposant que n marque l'ordre de la première dérivation pour laquelle les deux termes ne s'annullent plus simultanément, on trouve en effet,

$$\frac{F(a)}{\varphi(a)} = \frac{F^n(a)}{\varphi^n(a)} = \frac{F^n(a)}{0} = \infty.$$

3° Quand les deux dérivées prennent simultanément des valeurs déterminées, la valeur cherchée est finie et égale au rapport de ces dérivées.

45. Ce procédé est celui que l'on indique dans la plupart des traités d'analyse; il est, comme on le voit, trés-simple; mais par contre il présente deux inconvénients assez graves : le premier, c'est qu'il ne montre pas de quelle manière on arrive,

Google

par cette voie, à la véritable valeur de la fraction proposée. Le second, c'est qu'il n'offre pas toute la généralité qui paraît de rigueur dans les procédés de ce genre; car il suppose la possibilité de développer en série, d'après le théorème des dérivées et sous la valeur particulière a attribuée à x, les deux termes de la fraction proposée, quand on y donne à x l'accroissement δx, or, ce développement n'est possible que pour autant qu'aucun des termes de la fraction ne renferme une puissance fractionnaire du facteur $(x - a)$. Aussitôt que ce facteur entre avec un exposant fractionnaire dans une des fonctions $F(x)$, $\varphi(x)$, nous avons vu, § 35, que le développement en série ne peut plus s'obtenir. Le procédé du paragraphe précédent n'est donc pas applicable à ce genre d'expression.

Il importe cependant d'avoir un procédé général qui permette d'arriver à la valeur des expressions du genre de celles dont il est ici question. Nous sommes parvenu, au moyen de certaines remarques fort simples, à trouver un procédé beaucoup plus général que celui que nous venons d'exposer; mais avant de le démontrer, nous ferons quelques observations préliminaires qui serviront de base à cette démonstration.

46. La simple observation nous a conduit à cette remarque fondamentale, pour la démonstration dont il s'agit, que toute fonction de x qui s'annulle quand on y fait $x = a$, peut se traduire en une autre fonction de cette variable, qui soit multiple du facteur $(x - a)$ élevé à une puissance positive, la présence de ce facteur occasionnant seule l'annulation de la fonction.

On trouve des fonctions qui de prime abord paraissent faire exception à cette règle. Nous en discuterons quelques-unes afin de démontrer qu'elles y satisfont.

Soit par exemple la fonction $\cos x$, pour laquelle on a

$$[\cos x]_{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Cette fonction ne paraît pas soumise à la règle que nous

venons d'énoncer; mais on prouve aisément qu'elle s'y conforme complétement, en remarquant que

$$\cos x = \sin\left[\frac{\pi}{2} - x\right],$$

d'où

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \frac{\left(\frac{\pi}{2} - 2\right)^3}{2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^5}{2.3.4.5} \cdots$$

$$= \left[1 - \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}{2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^4}{2.3.4.5} \cdots\right]\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

fonction qui, sous la valeur particulière $x = \frac{\pi}{2}$, s'annule à cause de la présence du facteur $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ou $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

On a de même

$$\frac{1}{\mathrm{tg}\,(x)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin x} =$$

$$\frac{1}{\sin x}\cdot\left[1 - \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}{2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{2} - 2\right)^4}{2.3.4.5} - \cdots\right]\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

ou mieux encore

$$\frac{1}{\mathrm{tg}\,(x)} = \cot x = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^3}{3} + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^5}{3.5} + \frac{17\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^7}{3.5.7.3} + \cdots$$

série dont les coefficients se déterminent d'après une loi bien connue.

Nous devons cependant signaler deux expressions qui parais-

Digitized by Google

sent constituer une exception réelle à cette règle : ce sont les fonctions corrélatives $\frac{1}{\lg(x-a)}$ et $e^{-\frac{1}{x-a}}$. Ces deux expressions semblent s'annuler d'après une loi différente de celle que suivent les autres fonctions. Je me proposais de les distinguer en disant que les unes s'annulent d'une manière absolue et les autres par agrégation. Expliquons-nous ; une fonction s'annule par agrégation, sous une valeur particulière a attribuée à la variable, quand elle prend cette valeur à cause de la présence dans tous ses termes du facteur $(x-a)$ avec un exposant positif. Nous disons qu'une fonction s'annule d'une manière absolue quand elle prend cette valeur à cause de la présence dans cette fonction d'un facteur tel que $\frac{1}{\Psi(x)}$ dans lequel $\Psi(x)$ représente une fonction qui devient infinie (∞) d'une manière absolue pour la valeur $x=a$. Dire que $\Psi(x)$ devient infinie d'une manière absolue, c'est dire qu'elle le devient par toute autre cause que la présence du facteur $(x-a)$ avec un exposant négatif. Comme nous l'avons déjà dit, nous ne connaissons que les deux fonctions $\lg(x-a)$ et $e^{\frac{1}{x-a}}$ qui jouissent de cette propriété. Nous ne prétendons pas cependant qu'elles soient les seules ; mais nous laissons au temps le soin de décider si réellement ces expressions diffèrent des premières ; car pour nous la question n'est pas suffisamment éclaircie pour que nous puissions prendre une détermination à cet égard. Cette exception réelle ou apparente ne doit d'ailleurs pas nous inquiéter beaucoup ; car on rencontre rarement dans le calcul les expressions qui la constituent.

Nous passons sans autres préambules à la dénomination dont nous avons parlé plus haut. Nous disons donc que toute fonction de x qui s'annule pour $x=a$ est multiple d'une puissance positive du facteur $(x-a)$. On aura, par conséquent

Digitized by Google

$$F(x) = f(x)(x-a)^m$$

et

$$\varphi(x) = f_{,}(x)(x-a)^n,$$

m et n représentant respectivement les exposants du facteur $(x-a)$ commune à tous les termes des fonctions $F(x)$ et $\varphi(x)$, et $f(x)$ et $f_{,}(x)$ les quotients de la division de chacune de ces fonctions par le facteur en $(x-a)$ correspondant. Nous croyons inutile d'observer que les fonctions $f(x)$ et $f_{,}(x)$ prennent des valeurs finies quand on y fait $x = a$. Comme nous l'avons dit plus haut, m et n peuvent être entiers ou fractionnaires. Cela posé, prenons la fraction

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x)(x-a)^m}{f_{,}(x)(x-a)^n}. \quad (1)$$

qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$, quand on y donne à la variable la valeur particulière a. Pour trouver la véritable valeur de cette fraction quand $x = a$, il faut faire disparaître préalablement le facteur en $(x-a)$ commun aux deux termes de cette fraction. Tel est l'esprit du procédé suivi au § 44, pour arriver à la véritable valeur des fractions dont les deux termes peuvent se développer d'après la formule des dérivées, car les dérivations successives n'ont d'autre but que de diminuer l'exposant du facteur en $(x-a)$ commun aux deux termes de la fraction proposée. Il nous reste à prouver que le procédé de la dérivation est applicable quelles que soient les valeurs des exposants m et n, pourvu qu'ils restent positifs.

Nous allons démontrer en premier lieu, que si

$$\left[\frac{F(x)}{\varphi(x)}\right]_a = \frac{0}{0},$$

on a toujours

$$\left[\frac{F(x)}{\varphi(x)}\right]_a = \left[\frac{F'(x)}{\varphi'(x)}\right]$$

ou

$$\frac{F(a)}{\varphi(a)} = \frac{F'(a)}{\varphi'(a)}. \quad (a)$$

C'est-à-dire que l'on connaîtra la valeur de la fraction principale quand on aura celle de sa dérivée. Pour le prouver mettons la fraction sous la forme (1)

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x)(x-a)^m}{f_{,}(x)(x-a)^n}. \quad (b)$$

Cette expression peut prendre trois valeurs de natures différentes, suivant que l'on aura $m > n$, $m = n$ ou $m < n$.

1° Si $m > n$, la véritable valeur de la fraction est zéro, car on a, dans ce cas,

$$\left[\frac{F(x)}{\varphi(x)}\right]_a = \left[\frac{f(x)(x-a)^m}{f_{,}(x)(x-a)^n}\right]_a = \left[\frac{f(x)(x-a)^{m-n}}{f_{,}(x)}\right]_a = \frac{0}{f_{,}(a)} = 0.$$

2° Si $m = n$, la véritable valeur est égale au rapport des deux fonctions $f(a)$ et $f_{,}(a)$; on a en effet

$$\left[\frac{F(x)}{\varphi(x)}\right]_a = \left[\frac{f(x)(x-a)^m}{f_{,}(x)(x-a)^n}\right]_a = \left[\frac{f(x)}{f_{,}(x)}\right]_a = \frac{f(a)}{f_{,}(a)}.$$

3° Enfin si $m < n$, la valeur de la fraction est infinie (∞), car il vient

$$\left[\frac{F(x)}{\varphi(x)}\right]_a = \left[\frac{f(x)(x-a)^m}{f_{,}(x)(x-a)^n}\right]_a = \left[\frac{f(x)}{f_{,}(x)(x-a)^{n-m}}\right]_a = \frac{f(a)}{0} = \infty.$$

Si nous pouvons prouver que dans les mêmes cas et sous la même valeur de x, la dérivée prend toujours la même valeur que la fraction principale, nous aurons démontré l'exactitude de l'égalité (a).

Or, d'après l'égalité (b) et en vertu de la règle du § 6, nous avons

$$\frac{F'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{f'(x).(x-a)^m + m f(x).(x-a)^{m-1}}{f_{,}'(x).(x-a)^n + n\, f_{,}(x).(x-a)^{n-1}}. \quad (c)$$

Voyons quelles sont les valeurs de cette fraction dans les trois cas que nous venons de signaler, et sous la valeur $x = a$.

1° Si $m > n$, nous aurons aussi $m - 1 > n - 1$, en divisant les deux termes de la fraction du second membre de (c) par $(x - a)^{n-1}$, on n'aura pas changé la valeur de cette fraction ; on pourra donc écrire

$$\frac{F'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{f'(x).(x-a)^{m-n+1} + mf(x).(x-a)^{(m-1)-(n-1)}}{f_i'(x).(x-a) \quad + nf_i(x)},$$

d'où l'on conclut, puisque $m - n + 1 > 0$ et $(m - 1) - (n - 1) > 0$,

$$\frac{F'(a)}{\varphi'(a)} = \frac{0}{nf_i(a)} = 0,$$

valeur trouvée dans le même cas pour $\frac{F(a)}{\varphi(a)}$.

2° Si $m = n$ et par conséquent $m - 1 = n - 1$, on obtient en divisant les deux termes de la fraction (c) par $(x - a)^{m-1} = (x - a)^{n-1}$

$$\frac{F'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{f'(x).(x-a) + mf(x)}{f_i'(x).(x-a) + nf_i(x)}.$$

par conséquent,

$$\frac{F'(a)}{\varphi'(a)} = \frac{mf(a)}{nf_i(a)} = \frac{f(a)}{f_i(a)}.$$

3° Soit $m < n$, ce qui donne $m - 1 < n - 1$, si dans ce cas nous divisons haut et bas par le facteur $(x - a)^{m-1}$, il vient

$$\frac{F'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{f'(x).(x-a) + mf(a)}{f_i'(x).(x-a)^{n-m+1} + nf_i(x).(x-a)^{(n-1)-(m-1)}},$$

d'où l'on conclut, puisque $n - m + 1 > 0$ et $(n - 1) - (m - 1) > 0$,

$$\frac{F'(a)}{\varphi'(a)} = \frac{mf(a)}{0} = \infty.$$

Nous voyons donc que dans ces trois cas la dérivée prend

la même valeur que la fraction principale; or, l'ensemble de ces cas constituant toutes les combinaisons possibles entre les valeurs des quantités m et n, nous pouvons donc regarder l'égalité (a) comme démontrée en général. Ainsi nous aurons toujours

$$\frac{F(a)}{\varphi(a)} = \frac{F'(a)}{\varphi'(a)}.$$

On prouverait de même que

$$\frac{F'(a)}{\varphi'(a)} = \frac{F''(a)}{\varphi''(a)},$$

d'où

$$\frac{F(a)}{\varphi(a)} = \frac{F'(a)}{\varphi'(a)} = \frac{F''(a)}{\varphi''(a)},$$

et ainsi de suite, par conséquent, on aura d'une manière générale

$$\frac{F(a)}{\varphi(a)} = \frac{F^p(a)}{\varphi^p(a)}. \quad (d)$$

Cela posé, voyons si cette formule peut être de quelque utilité dans la recherche de la véritable valeur de la fraction

$$\frac{F(a)}{\varphi(a)} = \frac{0}{0}.$$

Remarquons d'abord que la formule (d) n'est exacte que pour autant que l'on aura $p > m$, si m est entier, et $p > n$, si n est un nombre entier. Ainsi aussitôt que l'un des exposants m ou n sera entier, l'ordre de la dérivation ne pourra pas dépasser ce nombre; c'est-à-dire que l'on ne peut, dans aucun cas, étendre la dérivation au delà de la première dérivée soit de $F(x)$, soit de $\varphi(x)$, qui prend une valeur différente de zéro (0) et de l'infini (∞) quand on y fait $x = a$, car sinon l'égalité (d) ne serait plus vérifiée.

Quand l'un des exposants m, n sera fractionnaire, au bout d'un certain nombre de dérivations les unités renfermées dans

ce nombre seront épuisées, en conséquence le facteur $(x - a)$ passera au dénominateur des dérivées suivantes, qui deviendront donc infinies pour $x = a$. Ainsi quand une dérivée deviendra infinie (∞), ce sera pour nous un indice que le facteur $(x - a)$ est passé au dénominateur de cette fonction.

Dans la recherche de la véritable valeur d'une fraction, nous pousserons toujours la dérivation jusqu'à ce que nous arrivions à une dérivée, soit du numérateur, soit du dénominateur, qui cesse de s'annuler quand on y pose $x = a$; c'est-à-dire que nous supposerons toujours

$$p \geqq m,\ p < m + 1$$

si

$$m < n$$

et

$$p \geqq n,\ p < n + 1$$

si

$$m > n.$$

Avec ces restrictions il peut encore se présenter huit cas bien distincts, entre les combinaisons des valeurs de m, n et p. Dans les sept premiers la dérivation donne directement la valeur de la fraction proposée; mais pour arriver au même résultat dans le huitième, on doit faire subir une préparation préalable à l'expression trouvée. Nous allons déterminer successivement ces huit cas.

Mais pour bien apprécier les valeurs auxquelles ils nous conduisent, nous devons obtenir la valeur générale de la première dérivée de la fraction proposée. Cette dérivée peut se mettre sous la forme générale

$$\frac{F^p(x)}{\varphi^p(x)} = \frac{P + m(m-1)\ldots(m-p+1)f(x)(x-a)^{m-p}}{P' + n(n-1)\ldots(n-p+1)f_1(x)(x-a)^{n-p}} \quad (e)$$

P représentant l'ensemble des termes du numérateur qui renferment au moins la $(m - p + 1)^e$ puissance du facteur $(x - a)$,

et P′ l'ensemble des termes du dénominateur qui contiennent ce facteur avec un exposant au moins égal à $(n-p+1)$. Comme ces expressions disparaîtront toujours quand on fera $x=a$, nous n'y aurons aucun égard dans l'évaluation de la fraction sous cette valeur particulière de la variable.

1° Si $m=p$ et $n>p$, la formule (e) devient, pour $x=a$,

$$\frac{F^p(a)}{\varphi^p(a)}=\left[\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)f(x)}{n(n-1)\ldots(n-p+1)f_{,}(x)(x-a)^{n-m}}\right]_a=$$

$$\cdot\ \frac{m(m-1)\ldots 2.1\,f(a)}{0}=\infty\,.$$

Telle est en effet la valeur que l'on trouve directement pour $\dfrac{F(a)}{\varphi(a)}$ quand $n>m$.

2° Si $m>p$ et $n=p$, la même formule (e) nous donne

$$\frac{F^p(a)}{\varphi^p(a)}=\left[\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)f(x)(x-a)^{m-n}}{n(n-1)\ldots(n-p+1)f_{,}(x)}\right]_a=$$

$$\frac{0}{n(n-1)\ldots 2.1.f_{,}(a)}=0.$$

C'est la valeur que l'on trouve directement quand $n<m$.

3° $m=p$ et $n=p$, donne pour (e),

$$\frac{F^p(a)}{\varphi^p(a)}=\left[\frac{m(m-1)\ldots 2.1.f(x)}{n(n-1)\ldots 2.1.f_{,}(x)}\right]_a=$$

$$\frac{m(m-1)\ldots 2.1.f(a)}{n(n-1)\ldots 2.1.f_{,}(a)}=\frac{f(a)}{f_{,}(a)}.$$

Cette valeur se vérifie aisément par le procédé direct, puisque $m=n$.

4° Si $m=p$, $n<p$ et $n+1>p$, l'équation (e) donne,

$$\frac{F^p(a)}{\varphi^p(a)}=\left[\frac{m(m-1)\ldots 2.1.f(x)}{n(n-1)\ldots(n-p+1)f_{,}(x)(x-a)^{-(p-n)}}\right]_a=$$

$$\frac{m(m-1)\ldots 2.1.f(a)}{\infty}=0.$$

C'est en effet la valeur que l'on trouve directement, puisque $m > n$.

5° $m < p$, $m + 1 > p$ et $n = p$, donne à la fonction (e) la valeur

$$\frac{F^p(a)}{\varphi^p(a)} = \left[\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)f(x).(x-a)^{-(p-m)}}{n(n-1)\ldots 2.1.f_{,}(x)}\right]_a =$$

$$\frac{\infty}{n(n-1)\ldots 2.1.f_{,}(a)} = \infty,$$

valeur qui se vérifie aisément, car $m < n$.

6° Soit $m < p$, $m + 1 > p$ et $n > p$, on trouve dans ce cas pour (e),

$$\frac{F^p(a)}{\varphi^p(a)} = \left[\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)f(x).(x-a)^{-(p-m)}}{n(n-1)\ldots(n-p+1)f(x).(x-a)^{n-p}}\right]_a =$$

$$\frac{\infty}{0} = \infty,$$

valeur qui se vérifie sans peine puisque $m < n$.

7° $m > p$, $n < p$ et $n + 1 > p$, donne

$$\frac{F^p(a)}{\varphi^p(a)} = \left[\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)f(x).(x-a)^{m-p}}{n(n-1)\ldots(n-p+1)f_{,}(x).(x-a)^{-(p-n)}}\right]_a =$$

$$\frac{0}{\infty} = 0.$$

Telle est en effet la valeur que donne le procédé direct quand $m > n$.

8° Enfin si $m < p$, $m + 1 > p$, $n < p$ et $n + 1 > p$, la formule (e) devient

$$\frac{F^p(a)}{\varphi^p(a)} = \left[\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)f(x).(x-a)^{-(p-m)}}{n(n-1)\ldots(n-p+1)f_{,}(x).(x-a)^{-(p-n)}}\right]_a = \frac{\infty}{\infty}.$$

Nous retombons ainsi sur une nouvelle forme indéterminée, dont on déduit facilement la véritable valeur cherchée, en faisant subir une certaine transformation à l'expression entre [ ]

avant d'y faire $x = a$. Les valeurs de $(p - m)$ et de $(p - n)$ peuvent présenter trois combinaisons différentes.

D'abord on peut avoir $(p - m) > (p - n)$, dans ce cas si l'on multiplie haut et bas par $(x - a)^{p-m}$, il vient

$$\frac{F^p(a)}{\varphi^p(a)} = \left[\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)f(x)}{n(n-1)\ldots(n-p+1)f_1(x).(x-a)^{(p-m)-(p-n)}}\right]_a =$$

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)f(a)}{0} = \infty.$$

C'est en effet la valeur que l'on trouve directement quand $m < n$.

On peut avoir aussi $(p - m) < (p - n)$, ce qui donne en multipliant par $(x - a)^{p-n}$,

$$\frac{F^p(a)}{\varphi^p(a)} = \left[\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)f(x).(x-a)^{(p-n)-(p-m)}}{n(n-1)\ldots(n-p+1)f_1(x)}\right]_a =$$

$$\frac{0}{n(n-1)\ldots(n-p+1)f_1(a)} = 0.$$

Valeur qui se vérifie directement, car dans ce cas $m > n$.

Enfin $m - p = n - p$ ou $m = n$; d'où l'on conclut en multipliant par $(x - a)^{p-m} = (x - a)^{p-n}$

$$\frac{F^p(a)}{\varphi^p(a)} = \left[\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)f(x)}{n(n-1)\ldots(n-p+1)f_1(x)}\right]_a = \frac{f(a)}{f_1(a)}.$$

On trouve en effet directement cette valeur quand $m = n$.

En résumé donc, la dérivation donne directement la valeur cherchée, à moins que les deux dérivées du numérateur et du dénominateur ne deviennent simultanément ∞ ; dans ce cas il faut faire subir à l'expression une préparation préalable, qui consiste à multiplier les deux termes de la fraction par ce facteur $(x - a)$ élevé à la puissance la plus grande avec laquelle il se trouve au dénominateur de l'un des termes de la première dérivée de la fraction principale dont les deux termes deviennent ∞.

Cette puissance pourra toujours aisément s'évaluer dans les cas particuliers.

Soit, par exemple, à chercher la valeur de la fraction

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

sous la valeur particulière $x = a$, qui donne

$$\left[\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}\right]_a = \frac{0}{0}.$$

En prenant les dérivées premières, on trouve

$$\left[\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x-a}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}\right]_a = \frac{\infty}{\infty}.$$

Mais si nous multiplions haut et bas par $(x-a)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x-a}$, il vient

$$\left[\frac{\frac{\sqrt{x-a}}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}}{\frac{x}{\sqrt{x+a}}}\right]_a = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{a}{\sqrt{2a}}} = \frac{\sqrt{2a}}{2a} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

Telle est la véritable valeur cherchée.

Prenons encore, comme exemple, l'expression

$$\left[\frac{x}{\operatorname{tg} x}\right]_0 = \frac{0}{0}.$$

La dérivation première donne

$$\left[\frac{1}{\frac{1}{\cos 2x}}\right]_0 = 1,$$

un (1) est donc la véritable valeur de cette expression.

Cette discussion qui est en même temps une espècc de démonstration pratique, établit beaucoup mieux que nous ne pourrions le définir, la nature ct l'esprit de la méthode que nous venons de suivre pour arriver à la solution du problème posé au commencement de ce chapitre. Nous aurions pu donner cet exposé plus succinctement; mais nous avons cru utile d'entrer dans toutes les considérations qui s'y rattachent afin de rendre la discussion aussi claire que possible.

47. Il nous reste à considérer un genre d'expression dont la discussion n'est en quelque sorte qu'un complément de celle que nous venons d'établir sur les fractions qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$. Nous voulons parler des fractions qui deviennent $\frac{\infty}{\infty}$ quand on y donne une certaine valeur à la variable. On a par conséquent d'une manière générale pour ces fractions

$$\left[\frac{F(x)}{\varphi(x)}\right]_a = \frac{\infty}{\infty}.$$

Cette valeur ∞, que prennent les fonctions $F(x)$ et $\varphi(x)$, quand on y fait $x = a$, provient en général de la présence dans ces fonctions du facteur $(x - a)$ avec un exposant négatif. Cette simple remarque ramène naturellement la recherche de la valeur de ces fractions, à celle de la valeur des fractions qui deviennent $\frac{0}{0}$, dans le même cas; en effet on a l'égalité

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)} = \frac{\dfrac{1}{\varphi(x)}}{\dfrac{1}{F(x)}} = \frac{\varphi_{,}(x)}{F_{,}(x)},$$

$\varphi_{,}(x)$ et $F_{,}(x)$ représentant les fonctions $\frac{1}{\varphi(x)}$ et $\frac{1}{F(x)}$.

Or si dans ces fonctions nous faisons $x = a$, nous trouvons, puisque $F(a) = \infty$ et $\varphi(a) = \infty$,

$$\left[\frac{\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{F(x)}}\right]_a = \left[\frac{\varphi_{,}(x)}{F_{,}(x)}\right]_a = \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}.$$

ou

$$\frac{\varphi_{,}(a)}{F_{,}(a)} = \frac{0}{0}.$$

mais on a, quelle que soit la valeur de x,

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi_{,}(x)}{F_{,}(x)}.$$

Il s'ensuit que l'on aura la véritable valeur de la fraction proposée quand on aura celle de la fraction

$$\frac{\varphi_{,}(a)}{F_{,}(a)} = \frac{0}{0}.$$

Ce dernier problème se trouvant complétement résolu, celui que nous venons de poser peut être regardé comme l'étant également.

Ce procédé, quoique simple et facile, n'est cependant pas celui que l'on indique dans les traités d'analyse. L'exposé de ce dernier donnant lieu à quelques observations très-curieuses, nous allons nous y arrêter quelque temps. Voici comment on obtient la formule fondamentale sur laquelle se base ce procédé : il a été démontré précédemment que si l'on a

$$\left[\frac{F(x)}{\varphi(x)}\right]_a = \frac{0}{0},$$

on a aussi

$$\frac{F(a)}{\varphi(a)} = \frac{F'(a)}{\varphi'(a)}. \quad (1)$$

Or, quand une fraction telle que $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ devient $\frac{\infty}{\infty}$ pour une certaine valeur attribuée à la variable, nous venons de voir

qu'on la ramène facilement à une fraction qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ dans le même cas ; on a en effet

$$\left[\frac{F(x)}{\varphi(x)}\right]_a = \left[\frac{\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{F(x)}}\right]_a = \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}, \quad (2)$$

mais en vertu de l'équation (1) nous avons aussi

$$\left[\frac{\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{F(x)}}\right]_a = \left[\frac{\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}}{\frac{F'(x)}{F(x)^2}}\right]_a = \left[\frac{F(x)^2 . \varphi'(x)}{\varphi(x)^2 . F'(x)}\right]_a . \quad (3)$$

Par conséquent, à cause de l'équation (2), on peut écrire,

$$\frac{F(a)}{\varphi(a)} = \frac{F(a)^2 . \varphi'(a)}{\varphi(a)^2 . F'(x)}$$

ou

$$1 = \frac{F(a)}{\varphi(a)} . \frac{\varphi'(a)}{F'(a)},$$

d'où l'on tire

$$\frac{F(a)}{\varphi(a)} = \frac{F'(a)}{\varphi'(a)} . \quad (a)$$

Telle est la formule fondamentale à laquelle nous voulions arriver; son exactitude est, comme on le voit, incontestable; mais de quelle utilité peut-elle être pour nous dans la recherche de la valeur des fractions dont nous venons de déterminer la nature ? Évidemment d'aucune ; car nous l'avons dit, la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$ provient de la présence dans les fonctions F (x), φ (x), du facteur $(x - a)$ avec un exposant négatif. Or, quand nous prenons les dérivées de ces fonctions nous diminuons encore cet exposant ; il s'ensuit nécessairement que toutes ces dérivées deviendrons ∞ pour $x = a$. La formule (a) ne peut donc en

Google

aucune manière nous conduire à la véritable valeur de semblables expressions.

Nous ne ferons pas aux mathématiciens qui ont employé la formule (a), l'injure de croire qu'ils aient voulu arriver à la valeur de ces mêmes expressions; nous savons au contraire qu'elle leur a servi à dissimuler une difficulté qu'ils avaient sentie sans pouvoir la résoudre. Je ne prétends pas être arrivé à ce dernier résultat; mais il me semble que l'on doit signaler avec franchise et netteté toute difficulté qui se présente, afin d'y porter l'attention de ceux qui étudient cette partie de la science. C'est du moins ainsi que j'entends les devoirs de ceux qui désirent sincèrement la voir progresser. Car ce que l'un n'a pu voir, un autre peut le découvrir, et l'on peut dire, sans crainte de se tromper, qu'il n'est difficulté logique qui ne trouve tôt ou tard sa solution.

Que les mathématiciens ont fait un mauvais usage de la formule (a), il est facile de le prouver par la nature même des expressions auxquelles ils l'ont appliquée. Prenons les choses dans l'état où elles se trouvaient auparavant; c'est-à-dire faisons abstraction du procédé que nous venons d'établir pour arriver à la véritable valeur des fractions qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$, et supposons le procédé du § 44 comme seul existant.

Nous venons de voir que la formule (a) n'est qu'une conséquence de l'équation (2) du § 44. Or, cette dernière n'est démontrée que pour les fonctions qui, sous la valeur particulière $x = a$, peuvent se développer suivant le théorème des dérivées; d'où il résulte que la formule (a) n'est applicable qu'aux fractions dont la réciproque jouit de la même propriété de pouvoir se développer d'après la formule des dérivées. Cependant on ne s'est pas fait scrupule de la faire servir à l'évaluation d'expressions dans lesquelles entrent les fonctions

$\lg(x-a)$ et $e^{\frac{1}{x-a}}$; malgré qu'il soit prouvé que le théorème des dérivées ne peut donner le développement de semblables expressions, quand on y fait $x = a$.

On a donc fait une pétition de principe en voulant parvenir de cette manière à la véritable valeur des fractions dans lesquelles entre l'une quelconque des fonctions que nous venons de signaler.

Si l'on parvient jamais à démontrer l'exactitude de la formule (a), pour les expressions dans lesquelles entrent les fonctions dont il s'agit, on devra nécessairement partir d'un point différent de celui où l'on a cru trouver cette démonstration, car il est facile de prouver que ce n'est pas la présence du facteur $(x - a)$ avec un exposant négatif, qui rend ∞ la fonction $\lg(x - a)$ quand on y fait $x = a$. Si ce facteur était la cause de ce résultat, il faudrait qu'il entrât dans la dérivée première de cette fonction, avec un exposant < -1, car la dérivation aura nécessairement eu pour effet de diminuer d'une unité l'exposant de $(x - a)$ que nous supposons déjà négatif dans la fonction principale. Or, il se trouve que ce facteur entre précisément avec un exposant $= -1$ dans cette dérivée, puisque

$$\frac{\delta . \lg(x-a)}{\delta x} = \frac{1}{x-a}.$$

On peut donc en conclure que ce n'est pas la présence de ce facteur qui rend

$$\lg 0 = -\infty.$$

Cette vérité est encore corroborée par le développement de $\lg(x)$; on trouve en effet,

$$\lg(x) = \lg[(1 + (x-1)] =$$

$$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots .$$

Or, si nous faisons dans cette formule $x = 0$, il vient

$$\lg(0) = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots =$$

$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdots\right) = -\infty.$$

Comme on le voit, cette valeur zéro, donnée à x, n'influe pas directement sur la valeur ∞ que prend l'expression dans ce cas. Cependant, comme nous ne voulons rien cacher, nous donnerons un autre développement de $\lg(x)$, dans lequel cette valeur zéro paraît jouer un rôle actif; par une transformation purement analytique, on trouve

$$\lg(x) = \sqrt{-1}\ \text{arc}\left(\sin = \frac{x^2 - 1}{2x\sqrt{-1}}\right) =$$

$$\frac{x^2-1}{2x} - \frac{(x^2-1)^3}{2.3.(2x)^3} + \frac{1^2.3^2(x^2-1)^5}{2.3.4.5\,(2x)^5} - \frac{1^2.3^2.5^2(x^2-1)^7}{1.2\ldots7\,(2x)^7} \cdots$$

d'où

$$(a)\quad \lg(x) = \left[(x^2-1) - \frac{(x^2-1)^3}{2.3\,(2x)^2}\right.$$

$$\left. + \frac{1^2.3^2(x^2-1)^5}{2.3.4.5\,(2x)^4} - \frac{1^2.3^2.5^2(x^2-1)^7}{1.2\ldots7\,(2x)^6} \cdots\right]\frac{1}{2x}.$$

Cela posé, soit par exemple à chercher la véritable valeur de l'expression $x \lg(x)$, quand on y fait $x = 0$, ce qui donne

$$[x.\lg x]_0 = 0 \times -\infty.$$

Si nous mettons cette expression sous la forme

$$[x.\lg(x)]_0 = \left[\frac{\lg(x)}{\frac{1}{x}}\right]_0 = \frac{\infty}{\infty}$$

Digitized by Google

et que nous appliquions la formule (*a*), nous trouvons

$$\left[\frac{\lg(x)}{\frac{1}{x}}\right]_0 = \left[\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}\right]_0 = [-x]_0 = 0.$$

Telle est la valeur que l'on trouve par ce procédé; nous la croyons exacte, car on a d'une manière absolue $0 \times \infty = 0$.

Voyons ce que nous donne la formule (α) dans le même cas.

$$[x \lg(x)]_0 = -\frac{1}{2} + \infty - \infty + \infty - \infty + \dots\dots$$

Remarquons bien que cette forme n'est pas un argument contre la valeur zéro trouvée précédemment; car il se peut fort bien que cette série soit égale à zéro, puisqu'on trouve dans un cas à peu près identique

$$e^{-\frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2.3\,x^3} + \frac{1}{2.3.4\,x^4} \dots\dots$$

d'où

$$\left[e^{-\frac{1}{x}}\right]_0 = 0 = 1 - \infty + \infty - \infty + \infty \dots\dots$$

Ces combinaisons d'infinis donnant lieu à des valeurs finies, ne doivent en aucune manière nous étonner, car elles se rencontrent assez souvent en mathématique; telle est par exemple la somme et la différence de plusieurs angles. D'un autre côté les quantités finies que nous manions si aisément ne sont-elles pas elles-mêmes des infinis relatifs? Toute la difficulté pour nous consiste à concevoir ces infinis; et ne pouvant les concevoir, nous ne pouvons raisonner sur leur nature que par induction, et l'on sait combien ces raisonnements sont sujets à caution. Lorsque nous avons dit au § 34, que la formule des dérivées tombe en défaut dans certains cas, nous avons énoncé un fait qui était faux d'une manière absolue; mais nous avons

eu raison de rejeter le développement que l'on obtient dans ces cas, parce qu'ils ne présentent rien d'appréciable à notre esprit; on doit en agir ainsi toutes les fois qu'un cas semblable se présentera dans le calcul.

Pour en revenir à notre sujet, entreprenons encore de traiter l'expression

$$\frac{\lg^2(x) + ax^2 + b}{\lg^3(x) + \lg(x) + cx},$$

qui devient $\frac{\infty}{\infty}$ quand on y fait $x = 0$.

Si nous appliquons la formule (a), il vient

$$\left[\frac{\lg^2(x) + ax^2 + b}{\lg^3(x) + \lg(x) + cx}\right]_0 = \left[\frac{\frac{2\lg(x)}{x} + 2ax}{3\frac{\lg^2(x)}{x} + \frac{1}{x} + c}\right]_0 =$$

$$\left[\frac{2\lg(x) + 2ax^2}{3\lg^2(x) + 1 + cx}\right]_0 = \frac{\infty}{\infty},$$

en appliquant de nouveau l'équation (a), on trouve

$$\left[\frac{2\lg(x) + 2ax^2}{3\lg^2(x) + cx + 1}\right]_0 = \left[\frac{\frac{2}{x} + 4ax}{\frac{2.3\lg(x)}{x} + c}\right]_0 =$$

$$\left[\frac{2 + 4ax^2}{2.3\lg(x) + cx}\right]_0 = \frac{2}{\infty} = 0.$$

C'est en effet la valeur que l'on trouve directement en traitant l'expression dans son état normal, puisque

$$\left[\frac{\lg^2(x) + ax^2 + b}{\lg^3(x) + \lg(x) + cx}\right]_0 = \left[\frac{\frac{1}{\lg(x)} + \frac{ax^2}{\lg^3(x)} + \frac{b}{\lg^3(x)}}{1 + \frac{1}{\lg^2(x)} + \frac{cx}{\lg^3(x)}}\right]_0 = \frac{0}{1} = 0.$$

Cette vérification est certes une grande présomption en faveur du procédé que nous venons de suivre, mais il ne prouve pas

encore la formule (a), car nous ne pouvons conclure du particulier au général. Remarquons d'ailleurs que le procédé diffère de celui que nous avons suivi pour les fractions qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$, en ce que nous avons dû multiplier haut et bas par x après chaque dérivation ; cette précaution est capitale, car si nous l'avions négligée, la dérivation ne nous aurait jamais conduit à une valeur finie.

Nous avons ainsi établi d'une manière impartiale, le pour et le contre de la question, en laissant au lecteur le soin de décider si l'on peut en tirer une conclusion stable ; quant à nous, nous ne le croyons pas, mais nous comptons assez sur l'avenir pour espérer que la difficulté qui vient d'être signalée ne tardera pas à être levée.

Si nous nous sommes étendu longuement sur l'objet de ce chapitre, c'est que nous le croyons très-important, car nous ne doutons pas que cette théorie ne puisse être d'un grand secours pour ceux qui s'attachent à l'étude de la théorie générale des équations d'un degré supérieur.

48. Nous n'en dirons pas davantage sur les applications du théorème des dérivées, car nous croyons avoir amplement atteint la première partie de notre but, qui était de prouver que le calcul des variations parvient à résoudre toutes les questions qui exigeaient l'emploi du calcul différentiel. Nous allons nous attacher actuellement à prouver qu'il parvient aussi à résoudre les questions qui font l'objet spécial des applications du calcul intégral. Mais nous devons d'abord établir les principes fondamentaux du calcul inverse de celui des variations, car ce n'est que par cet intermédiaire que nous pourrons parvenir à ce résultat. Après ces applications, nous traiterons les questions qui sont du ressort exclusif du calcul des variations. Nous espérons prouver ainsi l'unité de l'esprit qui préside à toutes les transformations du calcul transcendant.

CALCUL INVERSE

DE CELUI DES VARIATIONS

OU

PRINCIPES DU CALCUL ANALEPTIQUE.

49. On conçoit aisément que de la même manière qu'on remonte d'une différentielle à l'expression différentiée, en donnant ainsi lieu à une opération qui a reçu le nom d'intégration, on peut également revenir d'une variation à l'expression variée et donner ainsi naissance à un calcul qu'il nous faut dénommer.

Quoique l'esprit de la variation diffère essentiellement de celui de la différentiation, nous avons vu cependant que les procédés de ces deux calculs sont identiques. On comprend donc sans peine qu'il doit en être de même du calcul inverse de celui des variations et du calcul intégral. Les procédés de ces opérations, ou, si l'on veut, ces opérations étant les mêmes, il paraîtrait peut-être naturel de les désigner par une même dénomination. Mais avant de rien décider à cet égard, il importe de voir si cette manière d'agir ne pourrait pas donner lieu à des erreurs d'interprétation qu'il faut toujours éviter avec soin dans toute science et spécialement dans les sciences exactes.

On regarde une différentielle comme un élément ou une partie intégrante de la fonction différentiée. L'opération in-

Google

verse par laquelle on croit prendre la somme de toutes ces parties, a donc été très-bien nommée, dans ce sens du moins, calcul intégral. On voit par conséquent que l'esprit du calcul a seul présidé au choix du mot par lequel on l'a désigné. Or, nous avons vu que l'esprit du calcul des variations diffère essentiellement de celui du calcul différentiel, puisqu'une variation, loin d'être une partie intégrante de l'expression variée, peut même dépasser celle-ci en grandeur. Il ne peut donc être question d'intégration dans le calcul inverse de celui des variations. Il s'ensuit nécessairement que le mot intégral ne peut servir à le dénommer. D'ailleurs nous ne voulons rien préjuger sur le sort du calcul intégral; nous devons donc, pour éviter toute ambiguïté, donner une autre qualification au calcul dont l'exposé nous occupe en ce moment.

L'esprit du calcul des variations n'étant pas encore clairement déterminé, nous ne pouvons y avoir recours dans la qualification que nous voulons donner au calcul inverse. Nous devrons donc nous baser sur d'autres données dont la connaissance nous soit clairement acquise. Or, quand on remonte d'une variation à l'expression variée, que fait-on? Évidemment on refait ce qui a été fait, on rassemble les éléments qui ont été en quelque sorte dispersés par le procédé de variation pour en refaire un tout primitif; en un mot, on reconstruit la fonction au moyen de certaines données bien connues de valeur et de signification. D'après cela nous avons cru bien faire en désignant ce calcul sous le nom de *calcul analeptique* (du mot grec αναλεψις, qui se compose de ανα et de λαμβανω) qui marque l'action de rétablir, de reconstruire, ou, si l'on veut, de réorganiser la fonction primitive; car la variation peut être regardée comme une désorganisation partielle de l'expression variée. Cette qualification qui nous a été suggérée par une personne très-versée dans les sciences philologiques, présente l'avantage de ne rien préjuger sur la nature intime de l'opération qu'elle désigne.

Ce point nous paraît important pour la stabilité de cette dénomination, puisque nous ne savons si l'esprit de ce calcul reste le même dans toutes les applications qu'on en fait.

La coexistence du mot analeptique dans les sciences médicales ne nous paraît pas une raison pour le rejeter en mathématique, d'autant plus que ce mot s'y trouve avoir une signification entièrement conforme à celle que nous venons de lui attribuer.

Nous nous servirons du verbe *analepser* pour marquer l'action qu'accomplit le calcul analeptique. Cette action elle-même, nous la désignerons par le mot *analepsie*, en nommant *analepse* [1] le résultat de cette opération.

Il nous reste à traiter une dernière question préliminaire, c'est celle du symbole dont nous nous servirons pour indiquer l'analepsie. D'abord nous avions eu l'intention d'employer comme symbole la première lettre du mot analepse; mais, considérant d'un côté la complication de ce signe, de l'autre l'emploi général du signe $\int$ pour marquer une opération identique, quant à la forme, à celle que nous voulons désigner, nous avons cru devoir conserver le symbole dont on se sert dans le calcul intégral, pour marquer l'analepsie. Toutefois quand on voudra le faire servir à ce dernier usage, nous recommandons de le dépouiller préalablement de son caractère de sommation, qu'il ne peut conserver ici. Ainsi pour nous le signe $\int$ indique simplement l'opération inverse de celle que marque le signe δ. L'effet de l'un de ces signes détruit donc celui de l'autre, de sorte que nous aurons toujours

$$\int . \delta f(x) = f(x).$$

[1] A la rigueur le mot *analepse* devrait désigner l'action que nous représentons par le mot *analepsie*, mais nous avons cru pouvoir nous permettre cette espèce de variante pour éviter la répétition fréquente du mot *analepse;* d'un autre côté, l'emploi du même mot, pour désigner l'action et le résultat de cette action, aurait pu souvent jeter de l'incertitude dans le sens du discours.

On comprend sans peine que l'analepsie étant l'opération inverse de la variation, elle présuppose toujours cette dernière opération; on ne pourra donc jamais écrire

$$\int . f(x),$$

car cette expression n'aurait aucun sens.

Nous n'avons pas à craindre que l'emploi du signe $\int$ jette de l'incertitude dans les esprits sur la nature de l'opération qu'il indique, car la présence du dx ou du δx marquera suffisamment s'il s'agit d'une intégrale ou d'une analepse. D'ailleurs, s'il y avait confusion à cet égard, le mal ne serait pas grand, puisque ces deux manières de voir conduiraient au même résultat. Il ne peut donc en résulter aucune conséquence fâcheuse, l'esprit de la méthode différant seul dans ces deux cas; car il n'y a que la manière d'obtenir l'expression qu'il faut intégrer ou analepser qui présente une différence essentielle.

50. Le procédé d'analepsie dépend nécessairement du procédé de variation qui a conduit à l'expression qu'il faut analepser. Quand on voudra, par conséquent, trouver l'analepse d'une expression, il faudra d'abord déterminer le type général auquel elle se rapporte. Si elle ne se rapporte à aucun des types connus, on doit tâcher de l'y ramener au moyen de certaines transformations dont la nature dépend de celle de la variation dont on veut obtenir l'analepse. C'est la découverte d'un artifice particulier, qui permette de ramener cette expression à l'un des types connus, qui constitue les grandes difficultés que l'on rencontre quelquefois dans le calcul analeptique.

Nous croyons inutile de remarquer qu'avec les limites dans lesquelles nous avons restreint le calcul des variations, il faut que les quantités affectées du δ soient au même degré dans les deux membres de l'équation pour qu'il soit possible d'appliquer les procédés d'analepsie, car si l'on avait, par exemple,

$$\overline{\delta y}^m = f(x)\, \overline{\delta x}^n,$$



en supposant

$$m \gtrless n,$$

il serait impossible d'analepser une semblable expression, puisque nous savons à priori qu'aucune fonction ne peut donner une variation de cette espèce. Si plus tard on trouve un procédé plus général qui donne lieu à des variations de cette nature, on pourra leur appliquer les procédés d'analepsie qui les concernent, mais pour le moment il ne peut en être aucunement question.

On pourrait se demander : Existe-t-il toujours une analepse correspondant à une expression de la forme $\varphi(x)\,\delta x$? Nous croyons pouvoir répondre affirmativement à cette question; mais si l'on nous demandait : Sera-t-il toujours possible d'arriver à cette analepse? nous devrions répondre négativement, du moins dans l'état actuel de la science. Cette impossibilité peut provenir de l'existence possible de fonctions dont pour le moment nous n'avons aucune idée ; d'autre part, une variation peut être le produit de plusieurs fonctions combinées entre elles, une ou plusieurs de ces fonctions n'ayant laissé aucune trace explicite dans la variation. Dans ce cas, la possibilité d'analepser dépendra de la découverte d'un artifice qui mette toutes ces fonctions en évidence.

Nous avons donc à caractériser les types fondamentaux connus jusqu'à ce jour, mais auparavant nous devons entrer dans quelques considérations générales qui viennent en aide à la discussion de ces types. D'abord il résulte du § 9, que

$$\delta\,[\varphi(x) + c] = \delta.\,\varphi(x) = \varphi'(x)\,\delta x,$$

par conséquent

$$\int \delta\,[\varphi(x) + c] = \int \varphi'(x)\,\delta x = \varphi(x) + c = \int \varphi'(x)\,\delta x + c,$$

d'où l'on conclut cette règle générale, qu'à toute analepse

générale il faut ajouter une constante arbitraire, car on ne peut savoir d'avance si la variation $\varphi'(x)\,\delta x$ provient simplement de la fonction $\varphi\,(x)$, ou de cette fonction augmentée d'une constante qui a disparu par le procédé de variation. Quant à la valeur de cette constante on la détermine d'après la nature du problème qui a donné naissance à la variation $\varphi'\,(x)\,\delta x$. On y parvient aisément quand on connaît à priori deux valeurs simultanées, l'une de la variable et l'autre de l'analepse. C'est généralement le procédé que l'on suit dans la détermination de cette constante.

Nous avons aussi à considérer ce qui est relatif aux variations provenant d'expressions dans lesquelles plusieurs fonctions sont combinées entre elles par voie d'addition, de soustraction, de multiplication et de division.

51. La règle du § 5 nous donne

$$\delta.\,[\pm\varphi\,(x)\pm f\,(x)\pm \mathrm{F}\,(x)\pm\ldots] =$$
$$\pm\varphi'\,(x)\,\delta x\pm f'\,(x)\,\delta x\pm \mathrm{F}'\,(x)\,\delta x\pm\ldots$$

d'où l'on tire

$$\int[\pm\varphi'\,(x)\,\delta x\pm f'\,(x)\,\delta x\pm \mathrm{F}'\,(x)\,\delta x\pm\ldots] =$$
$$\pm\varphi\,(x)\pm f\,(x)\pm \mathrm{F}\,(x)\pm\ldots$$

mais on a

$$\varphi\,(x)=\int\varphi'\,(x)\,\delta x,\ f\,(x)=\int f'\,(x)\,\delta x,\ \mathrm{F}\,(x)=\int\mathrm{F}'\,(x)\,\delta x.\ \ldots$$

par conséquent

$$\int[\pm\varphi'\,(x)\,\delta x\pm f'\,(x)\,\delta x\pm \mathrm{F}'\,(x)\,\delta x\pm\ldots] =$$
$$\pm\int\varphi'\,(x)\,\delta x\pm\int f'\,(x)\,\delta x\pm\int\mathrm{F}'\,(x)\,\delta x\pm\ldots$$

d'où l'on conclut la règle générale que l'analepse de la somme ou de la différence de plusieurs variations est égale à la somme ou à la différence des analepses de chacune de ces expressions prises séparément.


Digitized by Google

52. Nous avons trouvé au § 6, pour le cas de deux fonctions multipliées entre elles, le résultat suivant :

$$\delta . f(x) . F(x) = f(x) . \delta F(x) + F(x) . \delta f(x) . =$$
$$f(x) . F'(x) \delta x + F(x) . f'(x) \delta x,$$

par conséquent

$$\int [f(x) . F'(x) \delta x + F(x) . f'(x) \delta x] = f(x) . F(x) + c,$$

d'où il suit que l'analepse d'une expression qui se compose de la somme de deux produits, dont le premier est le résultat de la multiplication d'une fonction par la variation d'une autre, et le second, celui de cette dernière fonction par la variation de la première, est égale au produit de ces deux fonctions.

On trouve d'une manière identique

$$\int [f(x) . F(x) \dots \Psi(x) . \delta\varphi(x) + \varphi(x) . F(x) \dots \Psi(x) . \delta f(x) + \dots$$
$$+ \varphi(x) . f(x) . F(x) \dots \delta . \Psi(x)] = \varphi(x) . f(x) . F(x) \dots \Psi(x).$$

53. Supposons que p et q représentent des fonctions de x, on aura, d'après les deux paragraphes précédents,

$$\int [p\delta q + q\delta p] = \int p\delta q + \int q\delta p = pq,$$

d'où l'on tire

$$\int p\delta q = pq - \int q\delta p.$$

Cette formule sert de base au mode de transformation connu sous le nom de *analepsie par parties,* dont on fait un si grand usage dans le calcul analeptique. Elle sert à faire dépendre une analepse dont on ne peut obtenir directement la valeur d'une autre dont la valeur soit connue ou qui se présente sous une forme plus simple.

Cette formule est d'une haute importance, car elle permet de lever une foule de difficultés qui seraient insolubles sans son secours.



54. Le procédé du § 7 nous a donné

$$\delta.\ \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{f(x).\ \delta.\ F(x) - F(x).\ \delta.\ f(x)}{f(x)^2}.$$

On en déduit

$$\int \left[\frac{f(x)\ F'(x) - F(x).\ f'(x)}{f(x)^2}\right] \delta x = \frac{F(x)}{f(x)} + c.$$

La règle qui résulte de cette égalité se comprend plus facilement qu'elle ne s'énonce ; nous nous abstiendrons de ce dernier soin, car il ne peut nous donner une idée plus claire du résultat que nous venons d'obtenir.

55. Avant de terminer ces considérations préliminaires, il nous reste à traiter en général les expressions qui sont multipliées par une constante.

Nous avons vu, § 8, que

$$\delta.\ A\, f(x) = A.\ \delta f(x),$$

d'où l'on déduit

$$\int A.\ \delta f(x) = A.\ f(x).$$

Or

$$f(x) = \int \delta f(x),$$

par conséquent

$$\int A.\ \delta f(x) = A \int \delta f(x),$$

d'où il suit que l'analepse d'une variation multipliée par une constante est égale à cette constante multipliée par l'analepse simple de cette variation.

56. Considérons d'abord la fonction x^m.

Nous avons trouvé, § 10,

$$\delta.\ x^m = m x^{m-1}\, \delta x.$$

Nous en tirons par analepsie

$$\int m x^{m-1}\, \delta x = x^m + c,$$

mais

$$\int mx^{m-1}\,\delta x = m\int x^{m-1}\,\delta x,$$

par conséquent

$$\int x^{m-1}\,\delta x = \frac{x^m}{m} + c'$$

ou, en faisant $m = n + 1$,

$$\int x^n\,\delta x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c'.$$

Ainsi pour obtenir l'analepse d'une certaine puissanee de x, multipliée par δx, il faut et il suffit d'augmenter l'exposant de x d'une unité et de diviser le tout par cet exposant ainsi modifié et par δx.

57. Nous venons de trouver

$$\int x^n\,\delta x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$$

Si nous supposons $n = -1$, on obtient l'égalité

$$\int \frac{\delta x}{x} = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} = \frac{x^0}{0} = \frac{1}{0} = \infty + c.$$

Ce résultat, qui paraît absurde au premier abord, n'est au fond qu'indéterminé. Pour le prouver, il suffit de remarquer que la forme de la constante c étant arbitraire, on peut poser

$$c = \frac{-a^{m+1}}{m+1},$$

ce qui donne pour l'analepse générale du paragraphe précédent,

$$\int x^m\,\delta x = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}.$$

Cette expression prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ quand on y fait $m = -1$. Si nous la traitons d'après la règle du § 46,

en prenant la dérivée du numérateur et du dénominateur par rapport à m, il vient

$$\left[\frac{x^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}\right]_{m=-1}=\left[\frac{\lg(x).\,x^{m+1}-\lg(a).\,a^{m+1}}{1}\right]_{m=-1}=$$

$$\frac{\lg(x)-\lg(a)}{1},$$

par conséquent

$$\int\frac{\delta x}{x}=\lg(x)-\lg(a).$$

Nous avions en effet trouvé, § 11,

$$\delta.\,\lg(x)=\frac{\delta x}{x},$$

d'où l'on déduit directement

$$\int\frac{\delta x}{x}=\lg(x)+c.$$

La forme indéterminée que nous avons obtenue provenait donc de la supposition fortuite que nous avions faite, qu'une fonction de la forme x^m puisse donner, par la variation, un résultat de la forme $\frac{\delta x}{x}$ ou $x^{-1}\,\delta x$. Nous voyons en effet que cette variation provient d'une fonction d'une nature toute différente.

D'où l'on conclut enfin la règle, que l'analepse d'une variation divisée par la fonction variée, est égale au logarithme népérien de cette fonction.

58. La variation de a^x nous a donné, § 12,

$$\delta.\,a^x=a^x\lg a\,\delta x,$$

d'où l'on tire, par analepsie,

$$\int\lg a\,a^x\,\delta x=a^x+c$$



ou

$$\int a^x\, \delta x = \frac{a^x + c}{\lg(a)}.$$

Ainsi l'analepse d'une exponentielle, multipliée par la variation de l'exposant, est égale à cette exponentielle divisée par le logarithme népérien de la base.

59. En variant un radical du second degré nous avons trouvé

$$\delta.\sqrt{x} = \frac{\delta x}{2\sqrt{x}},$$

par conséquent

$$\int \frac{\delta x}{\sqrt{x}} = \int 2\delta.\sqrt{x} + c = \int \delta.\, 2\sqrt{x} + c = 2\sqrt{x} + c.$$

La règle du § 56 nous conduirait au même résultat en y posant $n = -\frac{1}{2}$.

Ainsi l'analepse d'une variation divisée par la racine carrée de la fonction variée est égale à deux fois la racine de cette fonction.

60. Il nous reste à traiter en dernier lieu les fonctions trigonométriques dont nous avons obtenu les variations aux § 14, 15 et 16.

Nous avons d'abord

$$\delta.\sin x = \cos x.\, \delta x,$$

par conséquent

$$\int \cos x\, \delta x = \sin x + c.$$

Réciproquement

$$\delta.\cos x = -\sin x.\, \delta x,$$

d'où l'on déduit, en analepsant,

$$\int \sin x.\, \delta x = -\cos x + c,$$

de même

$$\delta.\operatorname{tg}(x) = \frac{\delta x}{\cos^2 x}$$

donne

$$\int \frac{\partial x}{\cos^2 x} = \text{tg}(x) + c.$$

En suivant les mêmes procédés, on trouve encore

$$\int \frac{\sin x . \partial x}{\cos^2 x} = \sec x + c,$$

$$\int \frac{\partial x}{\sin^2 x} = - \cot. x + c$$

$$\int \frac{\cos x . \partial x}{\sin^2 x} = - \text{cosec } x + c.$$

61. En cherchant, § 17, la variation d'un arc exprimé en fonction de son sinus, nous avons été conduit au résultat suivant :

$$\partial. \text{arc} (\sin = x) = \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

d'où l'on tire, par analepsie,

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}} = \text{arc} (\sin = x) + c. \quad (1)$$

Le § 18 nous a donné

$$\partial. \text{arc} (\cos = x) = - \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

par conséquent

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}} = - \text{arc} (\cos = x) + c' \quad (2)$$

ou

$$\int \frac{- \partial x}{\sqrt{1 - x^2}} = \text{arc} (\cos = x) + c.$$

En retranchant (2) de (1) on trouve

$$\text{arc} (\sin = x) + \text{arc} (\cos = x) + c - c' = 0$$

ou

$$\text{arc} (\sin = x) + \text{arc} (\cos = x) = c' - c = c''.$$

Il s'ensuit que la somme de ces deux arcs doit être constante; nous savons, en effet, qu'elle est égale à $\frac{\pi}{2}$, puisque ces deux arcs sont complémentaires.

Nous trouverions, d'après le § 19,

$$\int \frac{\partial x}{1+x^2} = \text{arc}\ (\text{tg} = x) + c.$$

On a de même

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{arc}\ (\text{sec} = x) + c$$

$$\int \frac{-\partial x}{1+x^2} = \text{arc}\ (\text{cot} = x) + c$$

$$\int \frac{-\partial x}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{arc}\ (\text{cosec} = x) + c.$$

Il est évident que toutes les transformations et les règles qui précèdent s'appliquent aux expressions où il y aurait une fonction de x, au lieu de cette variable seule, engagée sous le signe fonctionnel. Pour s'en convaincre plus amplement, on peut répéter les mêmes raisonnements en mettant partout $f(x)$ à la place de x.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur les procédés d'analepsie, puisqu'ils sont identiques à ceux du calcul intégral. Si l'on veut acquérir des connaissances ultérieures à cet égard, on peut recourir aux traités d'analyse; les procédés d'intégration étant les mêmes, il suffit de changer partout dx en ∂x, et d'attribuer à l'expression que l'on veut analepser une autre signification qu'à celle que l'on croit intégrer.

Nous passerons immédiatement à un chapitre dans lequel nous allons traiter une question beaucoup plus importante, c'est celle des applications dont le calcul analeptique est susceptible.

APPLICATIONS

DU

CALCUL ANALEPTIQUE.

62. La question dont nous allons nous occuper dans ce chapitre mérite au plus haut point de fixer notre attention, car elle est sans contredit la plus importante et la plus délicate de la science. Il n'est jusqu'à son histoire qui ne soit à tous égards intéressante, car elle présente un phénomène, peut-être unique dans les annales des connaissances humaines. Quoi de plus étonnant, en effet, que de voir, pendant plus d'un siècle, une foule de mathématiciens se laisser guider, à leur insu, par un principe dont ils n'avaient aucune connaissance? Que dis-je, se laisser guider? Ils raisonnèrent d'après ce principe et surent en tirer des conséquences qui ébranlèrent les convictions des adversaires les plus acharnés de la méthode infinitésimale. Cette question divisa constamment les corps savants en deux corps bien tranchés : d'un côté les synthétistes prouvant à satiété la fausseté des principes du calcul différentiel; de l'autre les analystes répondant à leurs arguments par des résultats d'une exactitude désespérante. La raison était pour les premiers et les résultats pour les seconds. Tels furent les éléments de cette lutte singulière, qui de jour en jour se décidait davantage en faveur des analystes. Les synthétistes rongèrent leur frein en silence, et les analystes, forts de leur victoire, se laissèrent

entraîner à reculer même les bornes qu'ils avaient d'abord assignées à leurs principes ; ceux-ci devenaient petit à petit des espèces de dogmes scientifiques, dont la confession devenait un acte de foi qu'il fallait professer quand on voulait pénétrer dans le temple de la science ; et qu'il y fallait maintenir, sous peine de se voir anathémiser par ses législateurs.

Les analystes, jugeant d'une théorie d'après les résultats auxquels elle les conduit, sans s'inquiéter de la vérité ou de la fausseté des principes sur lesquels elle se base, devaient nécessairement regarder celle des infiniment petits comme un modèle de ce genre. C'est ce qui explique l'acharnement qu'ils mirent à la défendre contre les attaques de ses adversaires ; acharnement qui du reste était légitime aussi longtemps que l'on ne proposait pas une théorie plus logique et conduisant aux mêmes résultats.

Pour bien apprécier les services éminents rendus à la science par la théorie infinitésimale, et pour comprendre l'esprit de la méthode que nous allons suivre, il nous faut jeter un coup d'œil rapide sur la nature des questions, à la solution desquelles on est arrivé par les calculs différentiel et intégral.

L'esprit originel qui a présidé à cette méthode de solution est d'ailleurs celui qui domine toute la science ; il consiste à ramener la solution d'un problème difficile à celui d'une question plus simple et connue dans tous ses éléments. Ce procédé général indiqué, il fallait l'appliquer aux problèmes à la solution desquels on est arrivé par le calcul intégral. Or les problèmes qui ont nécessité l'emploi de ce calcul présentent dans leur essence une propriété qui les caractérise tous et que je désignerais volontiers sous le nom de *continuité d'action.*

Cette continuité d'action ou, si l'on veut, cette variation continuelle dans les éléments de ces problèmes rendait leur solution singulièrement difficile. Comment, en effet, résoudre une question dont les données varient constamment ? Un

exemple particulier fera encore mieux ressortir cette difficulté : que l'on se propose, par exemple, de trouver l'aire d'une surface limitée par une ligne courbe. On sait qu'une courbe est une ligne dont les points (les points mathématiques, remarquez-le bien) changent constamment de directiou ; ce n'est pas tout encore, car non-seulement ces points changent de direction, mais ce changement peut s'effectuer d'après une infinité de lois. Comment donc fixer une nature aussi fugace?

Tel est cependant le problème que le calcul infinitésimal est parvenu à résoudre d'une manière très-heureuse. Pour y arriver il fallait introduire dans la question un élément ou un algorythme qui permit de faire abstraction de la continuité d'action ; de cette manière on ramène naturellement la solution de la question à celle d'un problème plus simple, puisque tout y devient uniforme. Cet élément, les analystes le trouvèrent dans leur δx, mais ayant méconnu la véritable nature de ce symbole, ou mieux de l'opération qu'il indique, ils le firent aller se perdre dans l'infini, persuadés que personne ne le suivrait jusque-là pour vérifier si ce que l'on disait sur sa nature était vrai. Telle fut la subtilité dont ils firent usage pour se dissimuler à eux-mêmes une difficulté qu'ils n'avaient pu résoudre, et ils ne s'aperçurent pas qu'en agissant de la sorte, ils portaient une atteinte grave au caractère distinctif de la science à laquelle ils voulaient donner de l'extension.

Ce n'est pas que ce procédé n'ait une apparence de logique qu'on ne peut lui contester ; rien n'est plus rationnel, en effet, que de représenter la continuité d'action comme une action qui se répète après *des temps infiniment petits*. Mais dire qu'un temps est infiniment petit, c'est dire qu'il n'a aucune valeur ; les analystes ont donc eu tort d'introduire dans le calcul un symbole qui ne représente rien de réel. C'est le reproche qu'on leur a fait, et certes il était bien mérité.

63. L'espèce d'examen critique que nous venons de faire

nous conduit naturellement à l'exposé de la méthode par laquelle nous voulons arriver à la solution des problèmes du genre de ceux dont nous venons de déterminer le caractère distinctif.

La marche que nous allons suivre d'abord n'est pas, nous le savons, celle qui sera adoptée par la suite; mais nous avons cru devoir procéder comme nous allons le faire, parce qu'il faut non-seulement indiquer les résultats auxquels on parvient, mais aussi la manière dont on y est arrivé. C'est précisément parce que la méthode que nous allons suivre se rapproche beaucoup de celle qui nous a conduit à ces résultats, que nous l'avons conservée dans ce mémoire. Nous indiquerons toutefois la marche que nous croyons la meilleure pour arriver promptement à la solution d'un problème.

Nous avons déjà fait pressentir plus haut de quelle manière nous voulons atteindre le but que nous nous sommes proposé; mais pour bien comprendre l'esprit du procédé, nous devons jeter un coup d'œil rétrospectif sur les propriétés caractéristiques de ce que nous avons appelé une variation. Or, si nous reprenons les raisonnements du § 2, nous serons conduit à une équation finale de la forme

$$\delta y = \varphi(x)\, \delta x \quad (1),$$

laquelle a reçu le nom de variation. Si nous analysons cette expression, nous voyons qu'elle se compose de trois parties bien distinctes, savoir : δy, δx et $\varphi(x)$ dont les deux premières sont respectivement des fonctions, l'une de y et l'autre de x, toutes deux variables de valeur et de forme; c'est-à-dire pouvant changer de valeur avec ces variables ou indépendamment d'elles. La troisième est une fonction déterminée de x. Les deux premières doivent toujours être telles que leur rapport soit égal à la troisième. Tels sont les caractères distinctifs des éléments d'une variation; d'après cela, quand on aura trois fonc-

Digitized by Google

tions, l'une de y et les deux autres de x, jouissant de toutes ces propriétés et satisfaisant à l'équation (1), leur ensemble formera une variation, c'est-à-dire une expression à laquelle on pourra appliquer les procédés du calcul analeptique.

Quand la fonction $\varphi(x)$ est déterminée à priori, on ne peut disposer arbitrairement que d'une seule des fonctions δy et δx; car, à cause de l'équation (1), la valeur de l'une d'elles détermine nécessairement celle de l'autre. Mais quand la fonction $\varphi(x)$ est indéterminée, on peut disposer à volonté de la valeur de deux des éléments d'une variation, la troisième pouvant toujours se déterminer de manière à satisfaire à l'équation (1). Ces propriétés nous laissent, comme on le voit, une grande latitude pour remplir les conditions d'un problème tout en les fondant en une variation. Quand on sera arrivé à ce dernier point la question sera résolue, puisqu'en appliquant les procédés d'analepsie à l'expression ainsi trouvée, on en déduira facilement la solution cherchée. Ceci suppose, bien entendu, que la variation obtenue de cette manière ne soit pas une de celles à l'analepse desquelles on n'est pas encore parvenu.

Ainsi, répétons-le, l'esprit de la méthode consiste à disposer convenablement des éléments d'une variation pour lui faire remplir les conditions du problème à la solution duquel on veut arriver.

Mais avant d'appliquer cette méthode à des cas particuliers, il nous reste à faire une remarque de la plus haute importance; c'est que dans un problème quelconque, il importe avant tout de déterminer la quantité, ou si l'on veut la variable, en fonction de laquelle doit s'exprimer la solution; sans cette précaution, on conçoit qu'il est impossible de baser cette solution sur une suite de raisonnements rigoureux, puisqu'il faut nécessairement connaître les relations qui existent entre une fonction et la variable dont elle dépend, pour arriver à la connaissance de cette fonction elle-même. Mais le choix de cette variable est

loin d'être arbitraire ; il est clair d'abord qu'on doit la prendre parmi les éléments de la question, mais cela ne suffit pas, car il faut choisir parmi ceux-ci celui dont la solution dépend naturellement, c'est-à-dire que cet élément doit être tel que la fonction cherchée ne puisse varier sans que cette variation ne soit le résultat d'un changement de valeur dans cet élément. Si dans la question il existe plusieurs quantités jouissant de ces propriétés, on prendra celle qui conduit le plus facilement à la solution du problème. Par exemple, dans tout problème sur le mouvement, l'espace doit toujours s'exprimer, soit explicitement, soit implicitement, en fonction du temps.

QUADRATURES

DES SURFACES PLANES.

64. La recherche de l'aire d'une surface quelconque limitée en tout ou en partie par une ligne courbe, est le premier problème d'analyse transcendante qui ait fixé l'attention des mathématiciens. C'est aussi celui dont nous allons nous occuper en premier lieu.

Tous les problèmes relatifs à la mesure des surfaces curvilignes peuvent se ramener à la recherche de l'aire de la surface comprise d'une part, entre une courbe quelconque et une droite fixe ; de l'autre, entre deux perpendiculaires abaissées de la courbe sur cette droite. Si nous prenons cette dernière pour axe des abscisses, les perpendiculaires seront des ordonnées de la courbe rapportée à cette droite et à sa perpendiculaire. Nous adopterons cette hypothèse parce qu'elle simplifie considérablement la discussion du problème, et que l'on peut dans tous les cas rapporter une courbe quelconque à de semblables axes.

Digitized by Google

Partant de là nous allons entreprendre la solution du problème qui vient d'être posé. Soit, pour fixer les idées, PABP′ (fig. 3) la surface dont il faille trouver l'aire; AB étant une partie de la courbe quelconque dont nous représentons l'équation par $y = \varphi(x)$. Désignons par S l'aire de la surface proposée. Comme nous l'avons dit plus haut, il faut d'abord déterminer l'élément en fonction duquel doit s'exprimer cette surface. Or, dans la question qui nous occupe, il n'y a que deux éléments bien distincts, ce sont les ordonnées et les abscisses de la courbe. C'est donc parmi ces quantités qu'il faut chercher la variable en fonction de laquelle il faut exprimer S. Or, l'ordonnée ne peut nous en tenir lieu, puisque dans beaucoup de cas la surface peut varier sans que l'ordonnée change de valeur. Le même défaut ne se présente pas pour l'abscisse, car sa surface ne peut varier indépendamment de cette coordonnée; l'abscisse est donc la variable en fonction de laquelle nous devons déterminer S. Mais de plus dans le problème que nous voulons résoudre il existe deux abscisses dont nous connaissons la valeur: ce sont celles des points A et B; reste donc à fixer notre choix entre ces deux quantités. Ce choix ne peut rester longtemps douteux, si l'on remarque que la surface varie dans le même sens que l'abscisse du point B, et en raison inverse de celle du point A. C'est donc l'abscisse du point B que nous devons prendre de préférence, non pas que celle du point A ne puisse nous conduire à la solution du problème, mais ce choix en compliquerait inutilement la discussion.

Cela posé nous allons supposer le point A fixe, et nous examinerons ce qui arrive quand on fait varier la position du point B. Nous ferons d'abord abstraction de la position du point A; nous y aurons égard, quand nous serons parvenu à la solution générale de la question. Or, quel que soit S, sa variation δS, qui est une fonction quelconque de S, exprimera toujours une surface quelconque dont nous allons chercher la

valeur en x, afin de remonter ensuite par analepsie à la valeur de S exprimée en x également. Mais pour que δS exprimé en x soit une variation, il faut que cette expression se compose, avons-nous vu, d'une fonction déterminée de x et d'une fonction arbitraire variable de forme. Or, dans la question qui nous occupe, il n'y a que l'ordonnée du point B qui soit une fonction déterminée de x, puisque $y = \varphi(x)$. Nous prendrons donc cet élément pour la partie déterminée de la variation ; d'un autre côté, quel que soit la valeur de la surface δS, on pourra toujours trouver une ligne qui fera avec BP un rectangle dont la surface soit égale à celle de δS. L'expression en x de cette ligne devant varier de valeur et de forme, pourra s'exprimer symboliquement par δx. On trouve par conséquent

$$\delta S = y \times \delta x = \varphi(x)\,\delta x, \quad (1)$$

d'où l'on déduit par les procédés du calcul analeptique

$$S = \int y\,\delta x + C = \int \varphi(x)\,\delta x + C. \quad (2)$$

Telle est la valeur générale cherchée pour la surface S ; mais sous cette forme elle est indéterminée, puisque la constante C a une valeur arbitraire. La valeur de C se détermine facilement dans le problème qui nous occupe, quand on connaît l'abscisse du point A, à partir duquel on commence à compter la surface. Pour que l'équation (2) donne la valeur de S dans ce cas, il faut que l'on ait $S = 0$ quand $x = a$, a représentant l'abscisse du point A. D'après cela il vient

$$0 = \left[\int \varphi(x)\,\delta x\right]_a + C,$$

d'où l'on tire

$$C = -\left[\int \varphi(x)\,\delta x\right]_a.$$

Si l'on substitue cette valeur de C dans l'équation (2), on trouve

$$S = \int \varphi(x)\,\delta x - \left[\int \varphi(x)\,\delta x\right]_a. \quad (3)$$

Supposons ensuite que nous voulions avoir la surface étendue jusqu'au point dont l'abscisse est b; il faut dans ce cas faire $x = b$ dans l'équation (3), ce qui donne

$$S = \left[\int \varphi(x)\, \delta x\right]_b - \left[\int \varphi(x)\, \delta x\right]_a.$$

Par analogie à ce qui se fait dans le calcul intégral et pour simplifier la notation, nous mettrons cette expression sous la forme

$$S = \int_a^b \varphi(x)\, \delta x, \quad (4)$$

en la désignant sous le nom d'analepse définie. Comme nous venons de le voir, cette notation indique qu'il faut prendre l'analepse générale de $\varphi(x)\, \delta x$, y substituer successivement au lieu de x les valeurs particulières a et b, et retrancher le premier résultat du second.

Si l'on prenait l'équation (2) en faisant abstraction de la constante, c'est-à-dire si l'on considérait l'analepse générale

$$S = \int \varphi(x)\, \delta x,$$

on pourrait se demander ce que représente une pareille expression. Cette question n'est pas difficile à résoudre, si l'on remarque que faire abstraction de la constante revient à la supposer égale à zéro; par conséquent l'analepse générale indique, dans ce cas, que l'on compte la surface à partir du point dont l'abscisse rend $\int \varphi(x)\, \delta x$ égal à zéro. Ce point est ce que l'on pourrait nommer l'origine naturelle de la surface, à moins toutefois que ce ne soit la valeur particulière $x = 0$, pour laquelle on aurait en même temps $\varphi(x) > 0$, qui ait annulé l'analepse générale.

La question proposée se trouve ainsi complétement résolue; mais pour prévenir toute objection, nous ferons quelques re-



marques fort importantes sur la marche que nous venons de suivre pour arriver à la solution de ce problème.

65. Quelques personnes nous demanderont, peut-être, pourquoi nous avons choisi la fonction qui exprime l'ordonnée y en x, pour former la partie déterminée de la variation, de préférence à toute autre fonction de l'abscisse. D'abord il n'est rien de plus naturel que de prendre dans la question elle-même les éléments qui doivent conduire à sa solution; on conçoit même que l'on n'y parviendrait pas si l'on prenait ces éléments en dehors du problème. Mais cette raison, en quelque sorte instinctive, ne prouve pas la nécessité de prendre la fonction $\varphi(x)$ plutôt qu'une autre. Cette preuve existe et nous l'eussions donnée plus tôt si nous n'avions craint d'entraver la solution du problème que nous avions à résoudre. La solution que nous venons de donner ne laisse d'ailleurs rien à désirer sous le rapport de la rigueur des déductions par lesquelles on y arrive; beaucoup de personnes s'en seraient même contentées, car elle est au moins aussi lucide que celle que l'on trouve dans les traités de calcul différentiel. Mais nous manquerions complétement le but que nous voulons atteindre si nous laissions la question dans cet état. Nous allons donc faire à ce sujet une petite dissertation sur laquelle nous appelons instamment l'attention du lecteur; car elle donne une idée précise du véritable état de la question.

Pour bien nous rendre compte de la nécessité de prendre la fonction qui exprime y en x pour la partie déterminée de la variation, remarquons d'abord qu'en agissant de la sorte nous disons implicitement que la fonction $\varphi(x)$ est la dérivée première de celle qui exprime la surface en fonction de la même variable. Cette nécessité doit donc dépendre des relations qui existent entre une fonction et la dérivée première. Nous sommes conduit de cette manière à considérer de nouveau les caractères distinctifs et fondamentaux d'une dérivée en général.

Digitized by Google

Nous avons vu, § 36, qu'une fonction étant traduite en un lieu géométrique, la dérivée première de cette fonction exprime la valeur de la tangente de l'angle que fait avec l'axe des abscisses la tangente menée en un point de la courbe dont l'abscisse est x. Nous avons vu aussi comment cette dérivée indique toutes les fluctuations de la courbe ainsi tracée ; ce qui lui a valu le nom de fluxion. Ces propriétés, quoique n'étant pas celles qui nous conduisent directement à la preuve que nous cherchons, viennent cependant en aide à la découverte de cette preuve. Dans le même chapitre nous avons encore fait une observation sur laquelle nous avons passé rapidement, parce qu'alors nous n'avions pas à notre disposition les éléments nécessaires pour en faire ressortir toute l'importance. Cet inconvénient ne se présentant plus en ce moment, nous allons tacher de l'exposer de nouveau en nous efforçant de la rendre aussi claire que possible.

Dans le paragraphe que nous venons de rappeler, nous avons fait voir que *la dérivée indique approximativement* la rapidité avec laquelle croît la fonction sous des valeurs très-peu différentes de celle sous laquelle on considère la dérivée, et *qu'elle indiquerait exactement* cette rapidité si le mode d'accroissement était le même que sous cette valeur de la variable. Dans ce dernier cas, le lieu géométrique qui représenterait cette fonction prendrait la direction de la tangente à la courbe, dont la fonction primitive représente l'équation.

Or, dans le problème que nous venons de résoudre, *l'ordonnée indique approximativement* la rapidité avec laquelle croît la surface aux environs du point dont l'abscisse est x ; et *elle indiquerait exactement* cette rapidité si le mode d'accroissement restait le même ; c'est-à-dire si l'ordonnée conservait la même valeur qu'au point dont l'abscisse est x. Nous voyons donc que l'ordonnée possède par rapport à la surface les mêmes propriétés qu'une dérivée par rapport à la fonction

primitive ; il s'ensuit de là que l'expression en x de cette ordonnée est la dérivée de celle qui exprime la surface en fonction de la même variable. D'où résulte clairement la nécessité de prendre la fonction $\varphi(x)$ pour la partie déterminée de la variation de la surface proposée.

Mais qu'entend-on par *mode d'accroissement?* Telle est la question que soulève nécessairement l'explication qui vient d'être donnée, et à laquelle nous n'aurions pas su répondre au § 36 ; car on ne peut concevoir ce que c'est que le mode d'accroissement en un point d'une courbe. Mais si l'on remarque que toute fonction est l'expression du résultat d'un problème et que la quantité qu'il représente doit avoir un certain mode d'accroissement, la difficulté disparaît complétement. Soit par exemple la surface la plus simple, celle d'un rectangle dont nous supposons les côtés représentés respectivement par a et b. Si nous supposons en outre que le côté b soit variable, le nombre qui exprime le côté a marque évidemment la rapidité avec laquelle croît la surface quand on fait croître b. Plus le côté a sera grand et plus la surface croîtra avec rapidité ; si ce côté devient double la rapidité de croissance devient également double. Cette valeur numérique de a est précisément ce que nous nommons le mode d'accroissement de la surface du rectangle. Mais au lieu de considérer un rectangle on peut supposer une surface de la nature de celle dont nous venons de trouver l'aire ; dans ce cas le côté a devient variable et représente les ordonnées de la courbe ; il s'ensuit que la rapidité avec laquelle croîtra la surface variera constamment, c'est-à-dire qu'à chaque point de la courbe elle aura un mode d'accroissement différent. Ce mode d'accroissement est précisément ce qu'indique la dérivée. On conçoit aussi que l'on peut considérer la génération d'une surface comme s'opérant d'une manière toute différente de celle que nous venons d'envisager ; car au lieu de la supposer engendrée par le mouvement de

l'ordonnée, nous pouvons regarder une surface comme engendrée par une droite ou une partie de droite qui tourne autour d'un point fixe. Ce mode de génération se présente quand on rapporte la courbe à ses coordonnées polaires. Or, il est évident que chaque mode de génération donne un mode d'accroissement différent, c'est-à-dire que la dérivée de la surface variera avec le mode de génération que l'on aura adopté. Dans les applications on pourra donc choisir celui qui conduira le plus aisément au résultat cherché. Il est clair d'ailleurs que ce choix dépendra de la nature de la surface dont on veut obtenir l'aire.

Ainsi en examinant attentivement le problème de quadrature que nous venons de résoudre, nous voyons que l'accroissement de l'abscisse indique comment et dans quel sens croît la surface, et que l'ordonnée marque la rapidité avec laquelle cette croissance s'effectue en un point déterminé. Si nous remontons à la variation de cette surface, nous voyons que le δS indique l'accroissement que prendrait la surface, si le mode de croissance restait constant et le même qu'au point dont l'abscisse est x. Cette propriété de l'opération marquée par le δ, de ramener les effets d'une loi de variation complexe et variable à la considération d'une loi de variation uniforme, est, comme on le voit, très-précieuse, puisqu'elle permet de résoudre les problèmes les plus difficiles et les plus compliqués, pourvu que les lois qui le régissent soient connues et déterminées.

Ainsi, répétons-le, la variation d'une fonction indique l'accroissement que prendrait la fonction, quand on attribue un accroissement quelconque à la variable, si le mode d'accroissement était constant et le même que sous la valeur de la variable que l'on considère. Il s'ensuit que l'on connaîtra une fonction quelconque quand on connaîtra la rapidité avec laquelle elle croît pour une valeur quelconque de la variable. La solution d'un problème dépend donc toujours de la découverte de la

dérivée ou fluxion de la fonction cherchée ; ainsi se trouve justifié ce que nous disions en commençant ce mémoire, que la théorie des fluxions bien entendue aurait pu conduire à des résultats au moins aussi satisfaisants que celle des infiniment petits. A la rigueur nous pourrions donc nous passer de l'algorithme que nous avons désigné sous le nom de variation ; mais ce symbole simplifiant considérablement les calculs et rendant un compte exact de l'état d'un problème, nous le conserverons comme une notation et un moyen d'investigation très-utiles.

En comparant une variation à ce qui a été désigné sous le nom de différentielle, on trouve entre ces deux algorithmes la différence fondamentale que voici : La différentielle d'une fonction indique l'accroissement que *prend* cette fonction quand on donne à la variable x un accroissement dx; tandis que la variation marque l'accroissement que *prendrait* la fonction, quand on donne à x l'accroissement δx, si le mode d'accroissement restait le même. Il y a donc entre une différentielle et une variation la même différence qu'entre un affirmatif et un conditionnel. Nous laissons au lecteur le soin de décider de quel côté se trouve la vérité.

Mais cette méthode est beaucoup plus longue que celle que l'on suit dans le calcul différentiel ! me dira quelque analyste. J'en conviens sans peine ; aussi n'ai-je pas prétendu donner une méthode plus courte, mais bien une méthode plus rationnelle, et cette longueur qu'on lui reproche est précisément son plus grand mérite à mes yeux ; car elle provient de la nécessité où l'on se trouve, dans les applications du calcul des variations, de raisonner le problème dans toutes ses parties avant que l'on puisse entreprendre sa solution. Je sais qu'il est plus simple de se laisser conduire en aveugle sans savoir d'où l'on vient ni où l'on va, comme cela se fait dans le calcul différentiel ; mais aussi quelle science acquiert-on de cette manière, si ce n'est

une science de pure mémoire? Car dans les applications du calcul différentiel le raisonnement n'entre pour rien ou du moins pour peu de chose; et ceux qui ont étudié les mathématiques transcendantes doivent reconnaître que ce n'est pas la compréhension de principes et des transformations du calcul différentiel qui leur a présenté le plus de difficulté, mais bien leur fixation dans la mémoire. Pourquoi cette facilité d'acquérir s'allie-t-elle à cette difficulté de retenir ou de conserver? N'est-ce pas parce que la science était devenue une simple étude d'observation et de perception? Ce point ne peut, me semble-t-il, laisser aucun doute dans les esprits. Ce défaut de rationnalité est un résultat nécessaire de la méthode, car on ne pouvait approfondir les faits sans découvrir aussitôt la fausseté des principes sur lesquels se fonde le calcul infinitésimal; cette manière de procéder aurait donc infailliblement renversé cet échafaudage élevé avec tant de peine; aussi s'est-on rigoureusement abstenu de raisonner, car on ne peut appeler du nom de raisonnement ces transformations analytiques hérissées de subtilités et d'artifices dont on fait un usage si constant dans la haute analyse.

La véritable science, celle qu'on ne peut oublier et qui laisse toujours des traces plus ou moins vives dans notre esprit, c'est celle que l'on acquiert en faisant usage de ses facultés réflectives; en un mot c'est celle que l'on acquiert par le raisonnement. Toute science qui marche sans mettre en jeu la réflexion, est une science d'actualité qui se dissipe aussi facilement qu'elle s'acquiert. Sous ce rapport donc, nous croyons la méthode que nous venons de suivre de beaucoup préférable à celle dont fait usage le calcul intégral. Nous allons voir en outre que tous les problèmes se résolvent de la même manière, car le même esprit les domine tous, il n'y a au fond que les éléments de la question qui varient.

CUBATURE DES SOLIDES

DE RÉVOLUTION.

66. Le problème le plus simple, celui auquel on ramène tous les autres sur la cubature des solides de révolution, consiste à chercher le volume du solide compris entre la surface courbe et deux plans perpendiculaires à l'axe de rotation. Pour simplifier la question, nous prendrons ce dernier pour axe des abscisses. Si nous coupons le solide par un plan passant par cet axe, son intersection avec la surface donne une courbe qui a reçu le nom de courbe génératrice de la surface; soit $y = \varphi(x)$ l'équation de cette courbe rapportée à l'axe de rotation comme axe des x, et à une perpendiculaire à cette droite comme axe des y. Supposons, pour fixer les idées, que PABP' (fig. 3) représente la demi-section du solide par un plan passant par l'axe, et que nous ayons pris l'axe des y dans ce plan.

Le solide croissant avec l'abscisse du point B et ne pouvant varier sans que cette ordonnée ne change de valeur, il s'ensuit qu'il faut exprimer le solide en fonction de cet élément. Cela posé, il nous reste à déterminer la fonction qui exprime la rapidité avec laquelle croîtrait le solide, si le mode d'accroissement restait le même qu'au point dont l'abscisse est x. Or, la rapidité de croissance dépend évidemment, dans la question qui nous occupe, de l'aire du cercle décrit par l'ordonnée BP', car plus ce cercle sera grand et plus le solide croîtra avec rapidité; si elle devient double, la croissance devient double. Il faut donc déterminer cette surface en fonction de x; mais le rayon de ce cercle étant y, on a pour l'expression de son aire πy^2; et puisque $y = \varphi(x)$, on trouve pour la dérivée de la fonction qui exprime le solide en x, $\pi \overline{\varphi(x)}^2$. Par conséquent nous pouvons écrire

$$\partial S = \pi \, \overline{\varphi(x)}^2 \, \partial x,$$

d'où l'on déduit, par analepsie,

$$S = \int \pi\, \overline{\varphi(x)}^2\, \partial x + C = \pi \int \overline{\varphi(x)}^2\, \partial x + C. \quad (1)$$

Mais jusqu'ici nous avons fait abstraction de la valeur de x à partir de laquelle on commence à compter le solide ; pour que S ait une valeur déterminée il faut donc avoir égard à la position du point A. Si nous appelons a l'abscisse de ce point, nous tirons de l'équation (1), à cause de $S = 0$, quand $x = a$,

$$0 = \left[\pi \int \overline{\varphi(x)}^2\, \partial x\right]_a + C,$$

par conséquent

$$C = -\left[\pi \int \overline{\varphi(x)}^2\, \partial x\right]_a.$$

Si nous substituons cette valeur de C, dans l'équation (1), il vient pour l'expression du volume

$$S = \pi \int \overline{\varphi(x)}^2\, \partial x - \left[\pi \int \overline{\varphi(x)}^2\, \partial x\right]_a. \quad (2)$$

Si nous voulons avoir le solide étendu jusqu'à $x = b$, il suffit de donner cette valeur à la variable dans l'équation (2), qui devient par conséquent

$$S = \pi \left[\int \overline{\varphi(x)}^2\, \partial x\right]_b - \pi \left[\int \overline{\varphi(x)}^2\, \partial x\right]_a,$$

ou, en mettant cette valeur de S sous la forme adoptée précédemment,

$$S = \pi \int_a^b \overline{\varphi(x)}^2\, \partial x. \quad (3)$$

Pour arriver à la solution du problème nous aurions pu suivre une marche très-peu différente à la vérité de celle que nous avons adoptée, mais qui dans certains cas facilite considérablement la solution du problème.



Nous avons vu, § 64, que la variation δS du solide marque l'accroissement qu'il prendrait quand on donne un accroissement δx à x, si le mode d'accroissement était uniforme et le même qu'au point dont l'abscisse est x. Dans la question qui nous occupe, c'est la variation de l'ordonnée BP' qui seule occasionne le changement de mode d'accroissement; si nous supposons cette ordonnée constante, le mode d'accroissement restera le même; et l'accroissement de solide que donnerait dans ce cas une augmentation δx attribuée à x, serait exprimée par le volume du cylindre engendré par la rotation du rectangle QCDQ' autour de l'axe des x. Or, le volume de ce cylindre est exprimé par

$$\pi y^2\, \delta x = \pi\, \overline{\varphi(x)}^2\, \delta x,$$

on aura par conséquent

$$\delta S = \pi\, \overline{\varphi(x)}^2\, \delta x,$$

d'où l'on tire par analepsie

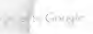
$$S = \int \pi\, \overline{\varphi(x)}^2\, \delta x + C.$$

Si nous voulons avoir le solide étendu depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$, nous pourrons écrire

$$S = \pi \int_a^b \overline{\varphi(x)}^2\, \delta x,$$

résultat identique à celui trouvé précédemment.

67. Mais dans tout ce qui précède nous avons considéré le solide comme engendré par le mouvement d'un cercle dont l'ordonnée est le rayon. On conçoit que l'on pourrait aussi regarder la surface PABP' comme la génératrice du solide. Dans cette hypothèse la surface mixtiligne PABP' est sensée tourner autour de l'axe des abscisses. Demandons-nous quel est, dans cette hypothèse, le volume du corps engendré?


Digitized by Google

Ici le volume varie avec deux éléments : d'abord avec l'abscisse du point extrême B de la surface génératrice, ensuite avec l'angle que fait le plan de la position primitive de cette surface avec celui de la position que l'on considère. Nous nommerons cet angle θ. Il est à remarquer que θ ne peut dépasser 360°, puisqu'alors la surface génératrice, prenant des positions qu'elle a déjà occupées, n'augmenterait en aucune manière la solidité du corps. Par conséquent cet angle ne peut varier qu'entre 0 et 360°.

Nous devons d'abord chercher comment s'accroîtrait le solide si la surface croissait uniformément avec les abscisses, ensuite l'accroissement qu'il prendrait si l'angle des deux positions extrêmes s'accroissait uniformément. Il s'ensuit que la variation du solide par rapport à ces deux éléments sera du second ordre, puisqu'elle aura été effectuée une fois par rapport à x et une fois par rapport à θ.

Si la surface croissait uniformément avec les abscisses, nous avons vu qu'en représentant par δx l'accroissement attribué à x, la surface prendrait un accroissement exprimé par

$$\varphi\delta x = \varphi(x)\,\delta x. \quad (\alpha)$$

Considérons actuellement quel solide engendrerait cette surface (α) si l'angle θ prenait un accroissement $\delta'\theta$. Ce solide est évidemment une espèce d'onglet cylindrique dont la solidité est égale à la surface génératrice multipliée par la moitié de l'arc engendré par le rayon du cylindre. Or, cet arc est égal à $y\delta'\theta$, puisqu'il a y pour rayon et $\delta'\theta$ pour amplitude ; il s'ensuit que le solide ainsi engendré sera

$$\frac{\varphi(x)\,\delta x \times \varphi(x)\,\delta'\theta}{2} = \frac{\overline{\varphi(x)}^2\,\delta x\,\delta'\theta}{2}.$$

Par conséquent

$$\delta'\delta S = \frac{\overline{\varphi(x)}^2\,\delta x.\,\delta'\theta}{2}.$$

Cette notation marque qu'il faut analepser deux fois, l'une par rapport à x et l'autre par rapport à θ.

Si nous analepsons d'abord par rapport à θ, il vient

$$\delta S = \int \frac{\overline{\varphi(x)}^2\, \delta x\, \delta'\theta}{2} + C,$$

mais x et δx étant indépendants de θ, on doit regarder ces quantités comme constantes quand on analepse par rapport à θ.

On pourra donc écrire

$$\delta S = \frac{\overline{\varphi(x)}^2\, \delta x}{2} \int \delta'\theta + C. \quad (1)$$

Si nous déterminons la constante C en supposant que l'on compte le solide à partir de $\theta = a$, et en remarquant qu'alors $S = 0$ et par conséquent $\delta S = 0$ quand $\theta = a$, nous aurons

$$0 = \frac{\overline{\varphi(x)}^2\, \delta x}{2} \left[\int \delta\theta\right]_a + C,$$

d'où

$$C = -\frac{\overline{\varphi(x)}^2\, dx}{2} \left[\int \delta\theta\right]_a.$$

Si nous substituons cette valeur de C dans (1), il vient

$$\delta S = \frac{\overline{\varphi(x)}^2\, \delta x}{2} \int \delta'\theta - \frac{\overline{\varphi(x)}^2\, \delta x}{2} \left[\int \delta'\theta\right]_a =$$

$$\frac{\overline{\varphi(x)}^2\, \delta x}{2} \left[\int \delta'\theta - \left(\int \delta'\theta\right)_a\right]. \quad (2)$$

Mais remarquons que

$$\int \delta'\theta = \left[\int \delta'\theta\right]_\theta,$$

nous pourrons donc mettre l'équation (2) sous la forme adoptée précédemment

$$\delta S = \frac{\overline{\varphi(x)}^2\, \delta x}{2} \int_a^\theta \delta'\theta.$$

Si nous analepsons par rapport à x, nous trouvons finalement

$$S = \frac{1}{2}\int \overline{\varphi(x)}^2 \, \partial x \int_a^\theta \partial\theta + C.$$

En étendant l'analepse depuis $x = b$ jusqu'à $x = c$, on trouve

$$S = \frac{1}{2}\int_b^c \overline{\varphi(x)}^2 \, \partial x \int_a^\theta \partial\theta.$$

Si nous cherchons le volume du solide étendu depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 360°$ ou $\theta = 2\pi$, il vient, puisque $\int\partial\theta = \theta$,

$$S = \frac{1}{2}\int_b^c \overline{\varphi(x)}^2 \, \partial x . \, 2\pi = \pi\int_b^c \overline{\varphi(x)}^2 \, \partial x,$$

formule déjà trouvée précédemment.

Dans la question que nous venons de résoudre on arrive directement à l'analepse prise par rapport à θ, parce que la loi de variation par rapport à cet élément est uniforme; mais dans certains problèmes cette loi étant variable et quelquefois les éléments dépendants l'un de l'autre, on ne peut arriver directement à ce résultat. Quoique nous aurions pu abréger de beaucoup la solution de ce problème, nous avons cependant préféré la donner dans toute son étendue, afin d'indiquer comment il faudrait procéder s'il se présentait un cas plus compliqué.

QUADRATURE DES SURFACES

DE RÉVOLUTION.

68. Un problème non moins intéressant est celui qui consiste à chercher l'aire d'une surface de révolution. Nous considérons encore ici la surface comprise entre deux plans perpendicu-



laires à l'axe de rotation. Soit, comme dans le problème précédent, $0x$ (fig. 3), l'axe de rotation que nous prenons pour axe des abscisses, supposons en outre tout le système coupé par un plan passant par cet axe, et que AB représente une partie de la courbe génératrice, dont nous désignons l'équation par $y = \varphi(x)$. Les droites AP et BP' sont les intersections des plans limites par le plan sécant. Cela posé, cherchons l'aire de la surface courbe, que nous désignons toujours par S.

Comme dans les problèmes précédents, la surface varie avec l'abscisse du point B, et dans le même sens que cette coordonnée ; nous la prendrons donc pour variable indépendante, c'est-à-dire que c'est en fonction de cet élément que nous exprimerons l'aire de la surface donnée.

Si nous cherchons la fonction qui marque la rapidité avec laquelle croîtrait la surface si le mode d'accroissement restait uniforme et le même qu'au point B, nous trouvons sans peine que cette fonction est celle qui exprime la circonférence décrite par le point B ; car la surface cylindrique que l'on obtient ainsi varie proportionnellement à cette circonférence quand on donne un accroissement δx à l'abscisse. Or, le rayon de la circonférence décrite par B étant y, l'expression en x de cette courbe sera

$$2\pi y = 2\pi . \varphi(x).$$

Cette fonction étant la dérivée de celle qui exprime la surface S en fonction de x, nous aurons

$$\delta S = 2\pi\varphi(x)\,\delta x,$$

d'où l'on tire, en appliquant les procédés du calcul analeptique,

$$S = \int 2\pi\varphi(x)\,\delta x + C = 2\pi \int \varphi(x)\,\delta x + C. \quad (1)$$

Si nous commençons à compter la surface à partir de l'ab-

scisse $x = a$, il faut que S = 0 sous cette valeur de la variable. Par conséquent cette équation devient

$$0 = \left[2\pi \int \varphi(x)\, \delta x\right]_a + C,$$

d'où l'on déduit

$$C = -2\pi \left[\int \varphi(x)\, \delta x\right]_a.$$

En substituant cette valeur de la constante dans l'égalité (1), la valeur de S devient

$$S = 2\pi \int \varphi(x)\, \delta x - 2\pi \left[\int \varphi(x)\, \delta x\right]_a.$$

Pour avoir la valeur de l'aire de la surface étendue jusqu'à l'abscisse $x = b$, il suffit de donner cette valeur b à la variable dans la valeur générale de S que nous venons d'obtenir. La valeur finie de la surface devient alors, en vertu d'une notation connue,

$$S = 2\pi \int_a^b \varphi(x)\, \delta x.$$

Nous serions arrivé au même résultat si nous étions parti de la propriété que possède la variation d'exprimer l'accroissement que prendrait la fonction si la loi de variation devenait uniforme. Or, dans la question qui nous occupe, la loi d'accroissement varie en vertu des changements qu'éprouve la valeur de l'ordonnée du point B. Par conséquent la variation cherchée est la surface du cylindre engendré par la droite δx sous le rayon y, d'où l'on conclut

$$\delta S = 2\pi y\, \delta x = 2\pi\varphi(x)\, \delta x.$$

En appliquant les procédés du calcul analeptique on en tire

$$S = 2\pi \int \varphi(x)\, \delta x + C.$$

par des raisonnements connus, cette formule devient

$$S = 2\pi \int_a^b \varphi(x)\, \delta x.$$

Mais au lieu de regarder la surface proposée comme engendrée par le mouvement de la circonférence dont le rayon est l'ordonnée, on peut la considérer comme provenant de la rotation de la courbe AB autour de l'axe ox. Dans ce cas la surface dépend de deux éléments, savoir : de la longueur et de la position de AB, et de l'angle que fait le plan de la position primitive de la courbe avec celle que l'on considère. Il faudra donc envisager la variation de la surface sous ce double point de vue, c'est-à-dire qu'il faut chercher la variation, de la surface engendrée, par rapport à x et par rapport à l'angle des deux plans extrêmes que nous représenterons par θ ; ou, ce qui est beaucoup plus simple, il faut chercher l'accroissement que prendrait la surface si l'on donnait à x un accroissement δx en supposant que le mode d'accroissement de la surface devienne uniforme par rapport à cet élément, et si l'on donnait à θ l'accroissement $\delta\theta$, en faisant sur cet élément la même hypothèse que sur le précédent.

Pour que le mode d'accroissement ne varie pas avec x, il faut supposer que l'ordonnée reste constante quand on donne un accroissement à cette variable, c'est-à-dire qu'il faut chercher la surface décrite par la ligne CD $= \delta x$, en tournant autour de ox ; dans ce cas, le rayon du cylindre engendré serait $y = \varphi(x)$. Voilà pour le premier élément. Supposons aussi que l'angle θ prenne un accroissement $\delta\theta$, lequel accroissement produira une variation uniforme, puisque l'angle θ est indépendant. Pour avoir la variation de la surface cherchée, il faut donc déterminer la surface qui aurait été décrite dans cette hypothèse. Cette surface est celle du fuseau cylindrique, engendré par le côté δx, avec un rayon y, sous un mouve-

ment angulaire $\delta\theta$; par conséquent elle sera exprimée par

$$y\ \delta'\theta\ \delta x = \varphi(x)\ \delta x.\ \delta'\theta,$$

d'où l'on conclut

$$\delta'\delta S = \varphi(x)\ \delta x.\ \delta'\theta.$$

On tire de cette équation, en analepsant par rapport à θ,

$$\delta S = \int \varphi(x)\ \delta x.\ \delta'\theta = \varphi(x)\ \delta x \int \delta'\theta + C.$$

Si nous comptons la surface à partir de $\theta = a$, il vient

$$C = -\left[\varphi(x)\ \delta x \int \delta'\theta\right]_a = -\varphi(x)\ \delta x \left[\int \delta'\theta\right]_a,$$

par conséquent

$$\delta S = \varphi(x)\ \delta x \left[\int \delta'\theta - [\int \delta'\theta]_a\right] = \varphi(x)\ \delta x \int_a^\theta \delta'\theta.$$

Si nous analepsons cette dernière expression par rapport à x, nous trouvons pour la surface cherchée

$$S = \int \varphi(x)\ \delta x \int_a^\theta \delta'\theta + C,$$

d'où l'on déduit, en étendant depuis $x = b$ jusqu'à $x = c$,

$$S = \int_b^c \varphi(x)\ \delta x \int_a^\theta \delta'\theta =$$

$$\int_b^c \varphi(x)\ \delta x\ [\theta]_a^\theta = (\theta - a) \int_b^c \varphi(x)\ \delta x.$$

Si nous faisons $a = 0$ et $\theta = 360^\circ = 2\pi$, c'est-à-dire si nous prenons la surface engendrée dans une révolution entière, nous trouvons comme précédemment,

$$S = 2\pi \int_b^c \varphi(x)\ \delta x.$$

Il est à remarquer que nous serions arrivé au même résultat si nous avions analepsé d'abord par rapport à x, et ensuite par rapport à θ. La même remarque s'applique au problème précédent. Cette faculté de choisir provient de ce que les deux éléments x et θ sont indépendants l'un de l'autre; mais il n'en serait plus de même s'il existait une relation nécessaire entre ces deux quantités. Nous verrons plus loin les considérations qui se rapportent à ce cas.

Avant d'abandonner le chapitre des applications du calcul analeptique aux problèmes de géométrie, il nous reste encore quelques questions fort importantes à traiter, entre autres celle de la rectification d'une courbe quelconque; ce problème donne lieu à quelques observations fort curieuses.

RECTIFICATION

DES COURBES PLANES.

69. Le problème que nous allons résoudre soulevant une difficulté qui ne se rencontre pas dans les questions que nous venons de discuter, nous avons cru devoir le placer après celle-ci. Pour rendre la discussion aussi claire que possible, nous déterminerons d'abord la nature et le but de ce problème, ainsi que les moyens qui sont à notre disposition pour atteindre ce but.

Soit AB (fig. 4) la partie d'une courbe quelconque qu'il faut rectifier, c'est-à-dire dont il faut exprimer la longueur en ligne droite. Déterminons en premier lieu l'élément en fonction duquel il faut exprimer cette longueur. Il est évident qu'elle sera une fonction de x ou de y; mais laquelle de ces coordonnées faut-il choisir? Telle est la première question qu'il faut résoudre. Il est clair que la solution du problème peut s'exprimer en fonction de x, puisque la longueur de la courbe ne peut

varier sans que x ne change de valeur ; mais l'ordonnée y n'est-elle pas dans le même cas? Il n'y a donc entre ces deux éléments aucune raison de préférence, du moins en théorie. Dans la pratique on pourra donc choisir celui qui conduira le plus facilement au résultat cherché.

Mais si nous cherchons avec quelle rapidité croît la longueur quand on l'exprime en fonction de l'une de ces quantités, il se présente une difficulté qui paraît d'abord insurmontable, c'est qu'en effet cette rapidité peut se trouver directement. Nous devons, avant tout, signaler une erreur dans laquelle on tomberait aisément, c'est celle qui consisterait à croire que la rapidité avec laquelle croît la longueur de la courbe est exprimée par la dérivée de la fonction qui représente cette courbe analytiquement. Mais il suffit de remarquer que cette dérivée marque la rapidité avec laquelle croît l'ordonnée pour rendre cette erreur impossible. Quant au mode d'accroissement de la longueur de la courbe, il dépend nécessairement de l'accroissement que prendrait l'abscisse et de celui que prendrait l'ordonnée si le mode d'accroissement restait uniforme. Pour ce qui est de la rapidité avec laquelle elle croît au point B, nous ne pouvons l'apprécier directement. Mais au moyen d'une simple observation on fait disparaître la difficulté que nous venons de signaler ; elle consiste à remarquer que la courbe prendrait la direction de la tangente BT, si le mode d'accroissement devenait uniforme et restait le même qu'au point B. Par conséquent la partie de la tangente correspondant à un accroissement δx ou δy, attribuée à x ou à y, exprime toujours l'accroissement de longueur qu'aurait pris la courbe si l'on avait donné un accroissement quelconque à l'une de ces coordonnés. Il s'ensuit que si nous représentons par L la longueur cherchée, la variation δL de cette longueur sera égale à BT.

Or

$$\overline{BT}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{TC}^2,$$



d'où

$$BT = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{TC}^2}.$$

Mais de plus TC exprime l'accroissement que prendrait l'ordonnée quand l'abscisse reçoit l'accroissement BC. Il s'ensuit que BC $= \delta x$ et TC $= \delta y$.

Par conséquent

$$BT = \delta L = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}. \quad (1)$$

Cette longueur exprime, comme nous venons de le voir, l'accroissement que prendrait la courbe, pour un accroissement δx attribué à x, si le mode était resté le même qu'au point B. Il en résulte que le rapport de cette longueur à l'accroissement δx, exprime la rapidité avec laquelle croît la courbe au point B. On a donc pour l'expression de cette rapidité

$$\frac{\delta L}{\delta x} = \frac{\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}}{\delta x} = \sqrt{1 + \frac{\delta y^2}{\delta x^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2}.$$

De même la rapidité avec laquelle croîtrait la courbe, si l'on prenait l'ordonnée pour variable indépendante, serait

$$\frac{\delta L}{\delta y} = \frac{\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}}{\delta y} = \sqrt{\frac{\delta x^2}{\delta y^2} + 1} = \sqrt{1 + \left(\frac{\delta x}{\delta y}\right)^2}.$$

Par conséquent, si l'on prend x pour variable indépendante, on aura

$$\delta L = \delta x . \sqrt{1 + \varphi'(x)^2}.$$

$y = \varphi(x)$ étant l'équation de la courbe, on en tire par analepsie

$$L = \int \delta x \sqrt{1 + \varphi'(x)^2} + C. \quad (2)$$

Si nous comptons cette longueur à partir de $x = a$, on trouve

$$0 = \left[\int \delta x \sqrt{1 + \varphi'(x)^2}\right]_a + C,$$

d'où

$$C = -\left[\int \delta x \sqrt{1+\varphi'(x)^2}\right]_a.$$

En substituant cette valeur de C dans (2), cette équation devient

$$L = \int \delta x \sqrt{1+\varphi'(x)^2} - \left[\int \delta x \sqrt{1+\varphi'(x)^2}\right]_a$$

Si l'on veut avoir la longueur de la courbe étendue jusqu'à $x = b$, il faut donner cette valeur à la variable dans l'expression de L, d'où l'on conclut, en se servant de la notation adoptée pour les analepses définies,

$$L = \int_a^b \delta x \sqrt{1+\varphi'(x)^2}.$$

La valeur de L en fonction de y serait, en représentant par $x = f(y)$ la valeur de l'abscisse en fonction de l'ordonnée,

$$L = \int_c^d \delta y \sqrt{1+f'(y)^2}.$$

On serait encore arrivé aux mêmes résultats, si l'on était parti directement de l'égalité (1) en remarquant que la longueur BT exprime la variation de celle de la courbe, et que l'on a

$$\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} = \delta x \sqrt{1+\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2} = \delta y \sqrt{1+\left(\frac{\delta x}{\delta y}\right)^2}.$$

D'où l'on déduit directement en étendant l'analepse depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$, ou depuis $y = c$ jusqu'à $y = d$, suivant la coordonnée que l'on prend pour variable indépendante,

$$L = \int_a^b \delta x \sqrt{1+\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2}$$

$$L = \int_c^d \delta y \sqrt{1+\left(\frac{\delta x}{\delta y}\right)^2}.$$

Parmi ces valeurs de S on choisira celle qui conduira le plus aisément au résultat.

On pourrait également résoudre le problème de la rectification en rapportant la courbe à ses coordonnées polaires. Mais cette application nouvelle nécessitant des considérations préliminaires, nous n'en parlerons point ici pour ne pas entraver trop longuement la marche de la théorie.

Nous croyons beaucoup plus utile de donner quelques considérations générales sur les problèmes que nous venons de résoudre, afin d'indiquer la marche qu'il convient de suivre dans des cas identiques.

70. Nous avons dit au § 64, que tous les problèmes sur la quadrature des courbes planes peuvent se ramener à la recherche de l'aire de la surface comprise entre une courbe, une droite fixe et deux perpendiculaires abaissées de la courbe sur la droite. On conçoit en effet que s'il s'agit, par exemple, d'évaluer la surface comprise soit entre les deux branches d'une même courbe, soit entre deux courbes différentes, on peut chercher la surface comprise entre la droite et la première branche de la première courbe, puis celle qui est comprise entre la droite et la seconde courbe, et faire ensuite la différence entre ces deux résultats. Mais au moyen d'une observation fort simple on ramène facilement toutes ces opérations à une seule. Pour cela il suffit de chercher une variation plus générale de la surface donnée. Nous avons obtenu pour la variation de la surface par rapport à x

$$\delta S = y\delta x,$$

mais cette variation est elle-même une surface qui varie avec y. Cette surface est un rectangle dont le mode et la rapidité d'accroissement, quand y varie, sont exprimés par δx. On aura donc pour la variation par rapport à y de la variation de la surface par rapport à x,

$$\delta'\delta S = \delta' y \; \delta x. \quad (1)$$

Telle est la variation la plus générale que l'on puisse obtenir pour une surface plane ; on voit que sa position étant indéterminée, elle s'applique à toutes les surfaces planes de quelque nature qu'elles soient d'ailleurs.

Proposons-nous de chercher la surface comprise entre les deux branches de courbe AB et A'B' (fig. 5) d'une part, et les ordonnées des points A' et B' de l'autre.

Les limites entre lesquelles il faut prendre la surface par rapport aux abscisses sont indépendantes puisqu'elles sont constantes, $x = a$ et $x = b$. Quant aux limites de l'analepse par rapport aux ordonnées, elles sont des fonctions de x, puisqu'elles sont égales aux ordonnées des points B et B' pris respectivement sur les courbes AB et A'B'. Il faut donc analepser d'abord par rapport à y, puisque cette analepse introduira des fonctions de x dans l'expression qu'il faut analepser par rapport à cette dernière variable. Soit $y = \varphi(x)$ et $y = f(x)$ respectivement les équations des courbes AB et A'B'. Cela posé, partons de la variation générale (1) pour arriver à l'aire de la surface cherchée

$$\delta'\delta S = \delta'' y \, \delta x.$$

Si nous analepsons par rapport à y, en prenant l'analepse entre les limites $y = \varphi(x)$ et $y = f(x)$, il vient

$$\delta S = \int_{y=\varphi(x)}^{y=f(x)} \delta' y \, \delta x = \delta x \int_{\varphi(x)}^{f(x)} \delta' y = \delta x \left[f(x) - \varphi(x) \right],$$

d'où l'on tire, en analepsant par rapport à x, entre les limites $x = a$ et $x = b$,

$$S = \int_a^b \delta x \left[f(x) - \varphi(x) \right] = \int_a^b \delta x \int_{\varphi(x)}^{f(x)} \delta y.$$

De la discussion de ce problème on déduit immédiatement cette règle que, lorsqu'une analepsie doit s'effectuer par rapport à deux variables, on doit traiter en dernier lieu la variable



iudépendante, c'est-à-dire celle dont les limites sont constantes. Cette variable indépendante est précisément celle en fonction de laquelle doit s'exprimer la solution du problème. Nous avons pris, comme précédemment, l'abscisse des points B et B′ pour l'élément en fonction duquel on doit exprimer la surface. Nous avons montré ailleurs la raison de ce choix.

Ainsi dans le cas où l'axe des y représenterait la droite fixe, on devrait d'abord analepser par rapport à x, et ensuite par rapport à y ; puisqu'alors les limites de l'analepse par rapport à x seraient des fonctions de y, c'est-à-dire que y devient dans ce cas l'élément en fonction duquel il faut exprimer S.

71. Considérons actuellement ce qui arrive, en général, quand on prend un solide rapporté à trois axes perpendiculaires.

Soient AB, AC et BC (fig. 5) respectivement les intersections de la surface limite du solide avec les plans des xy, des xz et des yz. Proposons-nous de trouver le volume compris entre les deux plans P et P′ perpendiculaires à l'axe des x. Il est clair que le volume de ce corps variera avec l'abscisse OP′ et dans le même sens que cette coordonnée. Nous choisirons donc cet élément pour la variable en fonction de laquelle nous exprimerons le volume du solide proposé. Cela posé il faut déterminer en premier lieu la rapidité avec laquelle varierait le solide si l'on donnait un accroissement à l'abscisse, en supposant que le mode d'accroissement reste le même qu'au point P′. Or, cette rapidité est évidemment exprimée par la surface P′C′DB′. Par conséquent la variation du solide par rapport à x est

$$\delta V = P . \delta x . \quad (1)$$

P représentant la surface de la figure P′C′DB′. Mais cette surface, nous ne pouvons en trouver directement la valeur ; nous devrons donc avoir recours à une seconde variation portant sur cet élément. D'abord la courbe B′DC′ qui limite cette

surface, est une fonction de y et de z, que nous représentons pour le moment par $z = \varphi(y)$. D'après cela, cherchons la variation de la surface proposée en un point quelconque quand on donne un accroissement à y, en supposant, comme toujours, que le mode d'accroissement reste le même qu'au point quelconque D de la courbe, c'est-à-dire en supposant la z de ce point constante. On trouve pour la variation de P

$$\delta' P = z\delta' y,$$

d'où, en multipliant par δx,

$$\delta x \ \delta' P = z\delta' y \ \delta x.$$

Si nous remarquons qu'en vertu de l'équation (1)

$$\delta x \ \delta' P = \delta' \delta S,$$

il vient

$$\delta' \delta V = z\delta' y \ \delta x. \quad (2)$$

Cette équation suffirait déjà pour arriver à la solution du problème, car l'équation de la surface donnera la valeur de z en fonction de x et de y. Mais nous pouvons obtenir une formule plus générale encore, en cherchant en outre la variation par rapport à z. Demandons-nous en effet quel accroissement prendrait la z, c'est-à-dire la droite dont l'expression marque la dérivée de la surface P'C'DB', en supposant le mode d'accroissement constant. Cette hypothèse rentrant complétement dans la nature de la quantité que nous voulons varier, il est clair que la variation de cette quantité sera exprimée par l'accroissement $\delta'' z$ lui-même.

De sorte qu'en multipliant par $\delta x \ \delta' y$, en remarquant (2) que

$$\delta x \ \delta' y \ \delta'' z = \delta'' \left[z\delta' y \ \delta x\right],$$

il s'ensuit que nous aurons pour la variation générale et complète du volume

$$\delta'' \ \delta' \ \delta V = \delta x \ \delta' y \ \delta'' z. \quad (3)$$

Cette valeur de la variation du troisième ordre du solide forme précisément le volume du parallélipipède, dont les côtés sont respectivement les accroissements δx, $\delta' y$ et $\delta'' z$.

Nous accentuons les δ parce que le mode de variation diffère pour chaque variable ; nous savons toutefois, d'après le § 32, que

$$\delta'' \delta' \delta \mathrm{V} = \delta' \delta'' \delta \mathrm{V} = \delta' \delta \delta'' \mathrm{V} = \ldots .$$

Ainsi le produit des trois variations δx, $\delta' y$ et $\delta'' z$ constitue la variation du troisième ordre d'un solide quelconque. De sorte que, pour arriver au solide lui-même, il faudra passer par trois analepsies, dont la première s'obtient directement. D'après l'ordre que nous avons suivi dans la discussion du problème, nous devons analepser d'abord par rapport à z, ensuite par rapport à y, et enfin par rapport à x. Par conséquent le volume sera exprimé par

$$\mathrm{V} = \int_a^b \delta x \int_c^d \delta' y \int_e^g \delta'' z. \quad (4)$$

Mais il est à remarquer que les limites e et g sont en général des fonctions de y et de x, et que les limites c et d de l'analepse par rapport à y peuvent être des fonctions de x.

Il est évident, d'ailleurs, que l'ordre des analepsies dépendra du choix libre ou forcé que l'on aura fait de la variable indépendante en fonction de laquelle doit s'exprimer le volume cherché. Pour rendre ce procédé plus lucide, nous appliquerons la formule générale à un exemple particulier fort simple. Soit à chercher le volume d'une sphère rapportée à son centre ; son équation sera par conséquent

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Puisqu'il faut chercher le volume total de la sphère, les coordonnées x, y et z entrent de la même manière dans le problème ; on pourra donc prendre à volonté l'une d'elles pour

variable indépendante en fonction de laquelle on exprimera le volume. Nous prendrons, comme dans le problème général, x pour variable indépendante du solide, et y comme variable indépendante de la surface qui exprime le mode d'accroissement au point dont l'abscisse est x; z exprimera par conséquent la rapidité avec laquelle croît la surface aux points dont l'abscisse est x, et l'ordonnée y.

Supposons, pour fixer les idées, que AB, AC et BC (fig. 5) représentent les intersections de la surface de la sphère avec les plans des xy, des xz et des yz; que OP représente en général l'abscisse sous laquelle on considère la variation du solide, et que P'K ou OQ' marque la y générale sous laquelle on considère la variation de la surface génératrice du solide. D'après ces hypothèses, il nous faut déterminer les limites entre lesquelles on doit prendre les analepses successives. La première analepse s'effectuant par rapport à z, il faut chercher les limites entre lesquelles il faut prendre ces coordonnées pour arriver au volume de toute la sphère. A cette fin on doit prendre la z étendue depuis la surface supérieure de la sphère jusqu'à la surface inférieure. Or, d'après l'équation de la sphère, ces valeurs de z sont des fonctions de la x et de la y du point K, pied de la z; mais on a en général

$$z = \pm\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}.$$

Par conséquent

$$+\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

exprime la limite supérieure, et

$$-\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

la limite inférieure de la z. Voilà pour ce qui concerne les limites de la première analepse.

Il nous faut actuellement exprimer les limites de l'analepse par rapport à y. Or, puisqu'il faut obtenir le volume de toute

la sphère, il faudra prendre toute la surface du cercle d'intersection de la sphère par le plan P, c'est-à-dire qu'il faudra prendre la surface génératrice depuis le point B′ antérieur jusqu'au point correspondant postérieur. Or le cercle d'intersection du plan des xy avec la sphère a pour équation

$$x^2 + y^2 = r^2$$

le point B′ et son correspondant postérieur étant des points de cette circonférence, leurs ordonnées seront respectivement représentées par

$$y = +\sqrt{r^2 - x^2}$$

et

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

Il faudra donc prendre l'analepse par rapport à y entre ces deux limites. Finalement nous avons à déterminer les limites de l'analepse en x; puisqu'il faut obtenir le volume total de la sphère, on doit étendre l'analepse depuis la plus petite valeur de x jusqu'à la plus grande valeur de cette coordonnée. La plus petite valeur de x est $-r$, et la plus grande $+r$; il faudra donc prendre l'analepse entre ces deux limites.

Cela posé, reprenons l'expression générale (4) du volume d'un solide, et faisons

$$g = +\sqrt{r^2 - x^2 - y^2},\ e = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2},$$

$$d = +\sqrt{r^2 - x^2},\ c = -\sqrt{r^2 - x^2},\ b = +r \text{ et } a = -r;$$

on aura ainsi pour l'expression du volume total de la sphère

$$\mathrm{V} = \int_{-r}^{+r} \delta x \int_{-\sqrt{r^2 - x^2}}^{+\sqrt{r^2 - x^2}} \delta' y \int_{-\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}^{+\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \delta'' z,$$

et puisqu'en général

$$\int \delta'' z = z + \mathrm{C},$$



d'où

$$\int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2-y^2}} \delta'' z = 2\sqrt{r^2-x^2-y^2},$$

il vient

$$V = \int_{-r}^{+r} \delta x \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} 2\sqrt{r^2-x^2-y^2}\,\delta y.$$

Mais

$$2\int \sqrt{r^2-x^2-y^2}\,\delta y =$$

$$(r^2-x^2)\,\text{arc}\left(\sin = \frac{y}{\sqrt{r^2-x^2}}\right) + y\sqrt{r^2-x^2-y^2} + C,$$

d'où

$$\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} 2\sqrt{r^2-x^2-y^2}\,\delta y =$$

$$(r^2-x^2)\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right] = \pi(r^2-x^2).$$

Par conséquent

$$V = \int_{-r}^{+r} \pi(r^2-x^2)\,\delta x = \pi\int_{-r}^{+r}(r^2-x^2)\,\delta x =$$

$$\pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{+r} = \pi\,\frac{4r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Telle est en effet l'expression du volume que l'on obtient par la géométrie élémentaire.

En résumant la marche que nous venons de suivre, nous voyons que, pour arriver au volume d'un solide, il faut passer par trois analepsies, dont la première a pour but de déterminer le mode et la rapidité d'accroissement de la surface génératrice du solide ; la seconde, de déterminer la surface qui exprime cette rapidité avec laquelle croît le solide en un point déterminé ; enfin la troisième a pour but de déterminer le volume lui-même.

Ainsi le calcul des variations a toujours un but analytique dont le calcul analeptique forme la synthèse. Dans le calcul des variations on passe du solide à la surface génératrice, et de cette dernière à la droite génératrice de cette surface; on ramène ainsi la mesure d'un solide à celle d'une ligne droite. Le calcul analeptique a, au contraire, pour but de remonter de la droite à la surface génératrice, et de celle-ci au solide qu'elle engendre.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur les applications de calcul analeptique à la géométrie, car celles que nous venons de donner permettront, nous le pensons, d'arriver à la solution de tout problème que l'on pourrait poser sur cette partie de la science, de quelque nature qu'il soit d'ailleurs. Mais avant de terminer le chapitre des applications, il nous reste à faire voir que l'esprit de la méthode est encore le même quand on applique le calcul analeptique à des problèmes qui se basent sur un autre ordre d'idées. Pour faire ressortir toutes les ressources de la méthode, nous avons choisi la théorie des mouvements uniformes et uniformément variés, que nous allons traiter *in extenso.*

DU MOUVEMENT UNIFORME

ET UNIFORMÉMENT VARIÉ.

72. Avant de traiter analytiquement la question renfermée dans ce titre, il convient d'entrer dans quelques considérations préliminaires sur la nature du mouvement et sur les lois qui le régissent. Le mouvement se définit en général par *le passage d'un corps d'un lieu dans un autre.* Cette définition nous conduit naturellement à nous demander : Qu'est-ce qu'un lieu? L'idée de la localité est-elle absolue ou relative? En d'autres

termes, le mouvement est-il absolu ou relatif? Ces questions si simples en apparence présentent cependant une des plus grandes difficultés qui se rencontrent dans la métaphysique. On dit en général qu'un lieu est l'espace qu'un corps occupe actuellement. Cette définition nous donne une notion assez claire de ce que c'est que le lieu relatif, mais elle laisse subsister la difficulté que l'on rencontre quand on veut se former une idée d'un lieu absolu. La difficulté étant la même pour le mouvement absolu que pour le lieu absolu, quand un de ces points sera résolu, la difficulté disparaîtra aussi pour l'autre; nous pourrons donc nous occuper immédiatement de la question du mouvement qui offre par elle-même un bien plus grand intérêt que celle de la localité.

Qu'est-ce que le mouvement absolu, c'est-à-dire le mouvement dans l'infinité de l'espace? Pour répondre à cette question, figurons-nous un corps isolé dans l'espace, et demandons ce qui peut caractériser le mouvement dans ce cas. Je ne sais si, sur ce point, j'ai été plus malheureux que d'autres, mais je n'ai jamais pu me figurer ce que pourrait être le mouvement d'un corps dans cette position. Pourquoi? Parce que je ne trouve aucun point de comparaison au moyen duquel je puis m'assurer de sa mobilité ou de son immobilité. N'est-il pas évident d'ailleurs, qu'avec quelque vitesse qu'il se meuve, et quel que soit le temps pendant lequel il se meut, ce corps restera toujours à la même distance des bornes de l'espace? Cela ne peut soulever aucun doute, puisque ces bornes n'existent pas. Qu'un métaphysicien cherche à résoudre cette difficulté, je le conçois; mais une telle préoccupation serait impardonnable chez celui qui s'occupe de sciences exactes; d'ailleurs tout homme ne doit-il pas savoir ignorer ce qu'il ne peut connaître, surtout lorsqu'il s'agit d'une connaissance qui ne lui serait d'aucune utilité?

Je viens de dire qu'il est impossible de concevoir le mouve-

ment d'un corps isolé dans l'espace; j'ajoute que la difficulté n'est pas moins grande lorsqu'il y en a deux; car dans ce cas on peut bien déterminer s'il y a conjonction ou disjonction entre ces corps, mais on ne peut caractériser leur mouvement. Ceci mérite explication. On pourrait me dire qu'il n'est rien de plus facile que d'apprécier si les corps s'éloignent ou se rapprochent; j'en conviens, mais je demanderai aussi comment on parvient à apprécier cette plus ou moins grande distance, si ce n'est en prenant une certaine unité de mesure qui constitue évidemment un troisième point de comparaison. Cette unité d'appréciation sera, par exemple, dans le cas qui nous occupe, la dimension de l'un des deux corps. Il est donc bien démontré que pour se faire une idée du mouvement il faut avoir au moins trois points de comparaison; c'est dire, en d'autres termes, que le mouvement ne présente rien d'absolu à notre esprit. Je ne nie cependant pas l'existence du mouvement absolu; je dis simplement que je ne puis le concevoir; d'un autre côté, sa conception n'offrirait aucun intérêt, puisque tous les mouvements que l'on considère sont des mouvements relatifs. Nous sommes donc en droit de ne considérer que des mouvements relatifs, puisque seuls ils présentent quelque chose de réel à notre esprit.

Le plus simple de tous les mouvements que l'on considère est le mouvement uniforme, qui est celui en vertu duquel un corps parcourt des espaces égaux en des temps égaux. Mais qu'appelle-t-on temps en général et temps égaux en particulier? Cette question est une conséquence immédiate de la définition que nous venons de donner. On y répond ordinairement en disant que *le temps est la succession des moments,* réponse qui déplace la difficulté sans la résoudre; car elle donne nécessairement naissance à cette question : Qu'est-ce qu'un moment? Je crois que l'on ne peut définir un moment autrement que par un temps très-petit; de sorte que cette définition nous fait cir-

culer dans un véritable cercle vicieux. Certains philosophes, pour trancher la difficulté, ont dit : « la notion du temps est innée à l'homme », et se sont ainsi dispensés du soin de le définir.

Il y a, certes, quelque chose de vrai dans ces deux manières d'envisager le temps; mais ni l'une ni l'autre ne répond aux exigeances de la raison, parce que toutes deux sont incomplètes. Après avoir mûrement réfléchi sur la question du temps, je suis arrivé à cette conclusion : « la notion du temps et celle du mouvement sont deux notions entièrement inséparables, ou si l'on veut, elles n'en font qu'une ». Je n'ai jamais pu me faire une idée exacte d'un mouvement sans faire intervenir le temps, ni du temps sans partir d'un mouvement; l'un de ces mots est toujours le complément indispensable de l'autre. A notre avis le temps n'est que le résultat abstrait de la comparaison quantitative de deux mouvements. Nous disons quantitative, parce que nous considérons l'espace parcouru, abstraction faite de la manière dont le mouvement s'est effectué. C'est dans ce sens que l'on peut dire que le temps est la succession des moments, si l'on entend par moment un mouvement quelconque pris pour point de comparaison. Cependant pour rester conforme au sens que l'on attache généralement au mot *moment,* nous continuerons à le regarder comme un temps ou un mouvement très-petit.

Cela posé, il s'agit de trouver un temps ou un mouvement qui puisse nous servir de terme de comparaison ou d'unité pour apprécier un mouvement d'une nature quelconque. On appelle temps égaux les mouvements que prendraient plusieurs corps identiques sur lesquels agiraient une même force, ces corps étant destinés à atteindre un même but d'une manière identique pour tous. Tels seraient, par exemple, les mouvements de plusieurs corps de même masse, sur lesquels agiraient une même force en vertu de laquelle ils devraient parcourir des espaces égaux. L'homme ayant remarqué et admiré l'har-

monie constante existant entre tous les mouvements de la nature, les a naturellement pris pour unité de mesure. Il a regardé les oscillations du pendule comme isochrones, et leur a donné le nom de *seconde,* en nommant *minute* l'ensemble de soixante secondes. Il a désigné sous le nom d'*heure* la révolution de la grande aiguille d'une horloge. Mais tous ces mouvements sont subordonnés au temps d'une révolution de la terre sur elle-même, lequel a reçu le nom de *jour :* on a désigné par *année* le mouvcment de la terre autour du soleil, et ainsi de suite. On choisit parmi ces unités celle qui exprime le plus simplement ce que l'on veut représenter ; on prend la seconde quand un événement n'embrasse qu'un petit nombre de ces unités ; on choisit le jour pour un événement qui s'étend sur plusieurs de ces unités ; on prend l'année si l'on considère un temps qui se compose de plusieurs années, etc., etc.

Ainsi pour nous le mot *temps* est synonyme de mouvement comparé [1]. Nous ne nions cependant pas l'existence du temps d'une manière absolue ; nous disons uniquement que nous ne concevons pas le temps absolu, c'est dire assez clairement qu'il n'existe pas pour nous. Nous l'avons dit, la sensation connue sous le nom de temps n'est que le résultat abstrait de la comparaison de deux ou plusieurs mouvements. Nous ne pouvons concevoir le temps en dehors du mouvement ; et, si quelquefois, même souvent, nous apprécions le temps sans prendre en dehors de nous un mouvement quelconque pour point de comparaison, c'est que nous sommes en quelque sorte des horloges vivantes, c'est que nous prenons pour unité les

[1] Ce que nous disons ici du temps n'est pas nouveau, car les hommes ont toujours confondu la notion du temps et celle du mouvement ; c'est ainsi que le mot *tempus* (temps) lui-même ne signifie autre chose que battement, et se trouve avoir la même origine que le mot *tempus* (tempe) qui désigne l'endroit de la tête où les battements du cœur sont le plus sensibles.

mouvements qui s'effectuent en nous, tels que les battements du cœur, les pulsations du cerveau, etc. Quand nous croyons faire abstraction de tout mouvement, nous prenons encore, à notre insu, ces mouvements intérieurs pour base de notre appréciation.

Cette manière de considérer le temps, que je ne regarderai cependant jamais comme la traduction exacte de la réalité, rend très-bien compte de tous les phénomènes où cet élément intervient, soit dans le monde physique, soit dans le monde moral, soit dans le monde intellectuel. Chaque fois que nous éprouvons la sensation du temps, nous faisons à notre su ou à notre insu la comparaison de mouvement. C'est dans ce sens que l'on peut dire, avec un certain philosophe, que le temps c'est la vie de l'esprit. Mais comme la comparaison des mouvements est loin d'être le seul acte de notre esprit, il s'ensuit que l'esprit peut vivre en dehors du temps, c'est-à-dire sans que la sensation du temps soit produite. C'est pourquoi l'homme, surtout celui qui s'occupe d'un travail intellectuel, apprécie si mal le temps. Ainsi suivant que deux individus auront plus ou moins comparé les mouvements, l'un dira qu'il y a deux heures qu'il est dans un endroit, tandis que l'autre prétendra n'y être que depuis une demi-heure. Tous ceux qui se sont livrés à des études abstraites doivent reconnaître que dans ces moments le temps passe pour eux avec une rapidité effrayante. Quand au contraire on s'attache presque exclusivement à comparer ces mouvements, on éprouve une sensation bien connue sous le nom d'*ennui*. Alors, en effet, on analyse chaque *minute*, chaque *seconde*, on les compare à des unités plus petites encore, et chacun sait que plus l'unité est petite, plus le nombre est grand ; ainsi plus nous comparerons, plus le temps semblera long. C'est aussi pour cette raison que dans les émotions vives, les battements du cœur s'accélérant, le temps paraît plus long que dans les positions ordinaires. Dans le sommeil

exempt de rêves le temps paraît nul, parce qu'alors toute comparaison cesse. En règle générale, plus l'attention se porte sur le temps, plus il paraît long, et plus elle s'en distrait, plus il paraît court.

La nature paraît même suivre à l'égard du temps des lois fort remarquables. Chacun sait, par exemple, que la longévité est en raison inverse de l'activité de la circulation du sang. Dans un individu, toutes choses égales d'ailleurs, plus les pulsations du cœur sont accélérées, moins longtemps il vit; plus le cœur bat lentement, plus la vie est longue. Je crois cependant que la sensation de vitalité est la même chez ces deux individus; car je pose en fait qu'un Italien vit en vingt années au moins autant qu'un Lapon en trente-cinq ou quarante : qui ne sait d'ailleurs combien les émotions d'un Méridional sont plus vives que celles d'un homme du Nord. Ne dirait-on pas qu'en moyenne tous les hommes ont un même capital de mouvement à dépenser après quoi la vie cesse? Quand nous disons que tel individu vit plus qu'un autre, c'est que nous rapportons la durée de leur vie à un mouvement fixe, tandis que nous trouverions probablement que leur quantité de vie est la même, si nous avions pris la vitalité de chacun d'eux pour point de comparaison. Tous ces phénomènes ont donné naissance à ce proverbe banal mais vrai : Qui va doucement, va longtemps.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur ces considérations qui nous ont en partie distrait du sujet principal que nous avons à traiter. Cependant il était indispensable de nous faire une idée exacte du mouvement et du temps, qui sont les deux éléments de la question que nous voulons résoudre; maintenant que nos idées sur ce point sont fixées, nous allons appliquer les considérations analytiques aux différents problèmes que l'on pose sur le mouvement.

73. Nous avons vu que l'homme a pris ses unités de temps parmi les mouvements de la nature; ce choix est d'autant plus

heureux qu'il permet à des individus qui ont des idées toutes différentes du temps de s'entendre parfaitement sur les conséquences qu'ils en tirent.

Le mouvement le plus simple que l'on connaisse, est le mouvement uniforme, c'est-à-dire celui en vertu duquel un corps parcourt des espaces égaux en des temps égaux. La simplicité de la loi de mouvement dans ce cas permet de résoudre directement les problèmes qui s'y rattachent ; en effet, si nous nommons t le temps pendant lequel on considère le mouvement, v la vitesse, c'est-à-dire l'espace parcouru pendant le temps pris pour unité, et e l'espace total parcouru, nous aurons évidemment

$$e = vt. \quad (1)$$

L'uniformité de cette loi n'empêche cependant pas d'y appliquer les considérations du calcul des variations ; demandons-nous en effet quelle serait la valeur que prendrait l'accroissement δe de l'espace pendant le temps δt, si après le temps t, le mouvement devenait uniforme. La vitesse v étant constante, on aura

$$\delta e = v\delta t,$$

d'où l'on tire par analepsie

$$e = \int v\delta t + \mathrm{C} = v\int \delta t + \mathrm{C} = vt + \mathrm{C}. \quad (2)$$

Cette équation diffère de la formule (1) par la présence de la constante C ; cette différence provient de ce que, pour arriver à l'équation (2), nous n'avons eu égard qu'à la loi qui régit le mouvement actuel, c'est-à-dire que nous trouvons ainsi l'espace parcouru en vertu de cette loi, en faisant abstraction de l'espace qu'aurait pu parcourir le corps antérieurement à l'introduction du mouvement uniforme. Dans la formule (1) nous avons implicitement supposé que cet espace est nul ; si nous faisons la même hypothèse sur l'équation (2), c'est-à-dire si nous suppo-

sons $e = 0$ quand $t = 0$, on trouve $C = 0$, ce qui ramène cette formule à la forme (1). Mais si l'on suppose que le corps avait déjà parcouru l'espace a antérieurement au temps t, alors la formule devient

$$e = vt + a. \quad (3)$$

C'est l'équation la plus générale du mouvement uniforme. On voit que l'application du calcul des variations nous a fait découvrir une particularité qui était passée inaperçue, quand nous avons résolu le problème directement. L'équation (3) renfermant toutes les circonstances du mouvement uniforme, nous pouvons regarder le problème comme complétement résolu; nous passerons donc à celui du mouvement uniformément varié.

74. Le mouvement uniformément varié est celui en vertu duquel un corps prend, après des temps égaux, des accroissements de vitesse égaux. Désignons, comme dans le problème précédent, par t le temps du mouvement, par v la vitesse acquise après ce temps, et par e l'espace parcouru, toujours pendant le temps t. L'espace parcouru sera nécessairement une fonction de t; mais la vitesse v dépend également du temps; le problème proposé rentre donc entièrement dans la catégorie de ceux qui se résolvent par le calcul des variations.

Ici la loi ou le mode d'accroissement de l'espace, en un moment quelconque, est évidemment marquée par la vitesse acquise par le mobile à l'instant où l'on considère le mouvement. Si nous supposons la loi d'accroissement uniforme à partir de cet instant, c'est-à-dire si nous regardons la vitesse comme demeurant constante, l'accroissement d'espace δe, dû à un temps δt, sera exprimé par

$$\delta e = v\delta t. \quad (1)$$

Mais il est impossible de tirer la valeur de e de cette équation,

puisque v est une fonction de t dont la forme ne nous est pas encore connue ; il faut donc avant tout déterminer la valeur de v en fonction de t.

Puisque la loi de variation de v en fonction de t est uniforme, on peut déterminer directement v en fonction de t. Pour cela il suffit de connaître la vitesse qu'aurait acquise le mobile en partant du repos après un temps quelconque, t', par exemple ; si nous représentons par φ cette vitesse, nous aurons

$$v = \varphi \frac{t}{t'},$$

et si nous prenons t' pour l'unité de temps, nous aurons simplement

$$v = \varphi t. \quad (2)$$

Mais l'uniformité dans les accroissements de v n'empêche pas d'appliquer les considérations du calcul des variations à l'évaluation de cette quantité. Demandons-nous quelle serait la valeur que prendrait l'accroissement de vitesse $\delta' v$ pendant un temps quelconque $\delta' t$, si la loi d'accroissement restait uniforme, c'est-à-dire si après chaque unité de temps la vitesse s'accroissait de la quantité φ? Cet accroissement sera évidemment exprimé par

$$\delta' v = \varphi \, \delta' t, \quad (3)$$

d'où l'on tire, par analepsie,

$$v = \int \varphi \delta' t + C = \varphi \int \delta' t + C = \varphi t + C, \quad (4)$$

équation qui diffère de (2) par la présence de la constante C. C'est qu'en effet, pour arriver à l'équation (3), nous n'avons eu égard qu'à l'accroissement de vitesse dû à la loi de variation uniforme telle que nous l'avons supposée dans l'énoncé du problème. Nous avons donc fait abstraction de la vitesse que le corps aurait pu acquérir antérieurement au temps t, pendant

lequel nous considérons le mouvement. Si nous supposons qu'à l'origine de ce temps le corps avait déjà une vitesse a, il faut que $v = a$ quand $t = 0$; l'équation (4) donne par conséquent

$$a = C,$$

d'où l'on conclut

$$v = \varphi t + a. \quad (5)$$

Si nous substituons cette valeur de v dans (1), il vient

$$\delta e = [\varphi t + a]\, \delta t = \varphi t\, \delta t + a \delta t,$$

d'où l'on déduit, par les procédés du calcul analeptique,

$$e = \int \varphi t\, \delta t + \int a \delta t + C = \frac{\varphi t^2}{2} + at + C. \quad (6)$$

Si nous supposons qu'à l'origine du temps t le corps a déjà parcouru l'espace b, il faut que $C = b$ quand $t = 0$; par conséquent l'équation (6) donne

$$b = C.$$

Il vient donc enfin

$$e = \frac{\varphi t^2}{2} + at + b. \quad (7)$$

Les formules (5) et (7) donnent toutes les circonstances du mouvement uniformément varié. Si l'on veut appliquer ces formules à la chute des corps à la surface de la terre, on doit y faire $\varphi = 9^m,8808$, en supposant que le temps t soit exprimé en secondes. Ce nombre est ordinairement représenté par la lettre g.

Si l'on suppose nulle la vitesse acquise a et l'espace parcouru b antérieurement au temps t, les formules générales deviennent

$$v = \varphi t$$

$$e = \frac{\varphi t^2}{2}.$$

Nous croyons inutile d'observer que la vitesse d'un corps est l'espace parcouru d'une manière uniforme, divisé par le temps mis à le parcourir. Quand on dit vitesse acquise, on entend l'espace que parcourait le corps pendant l'unité de temps si la vitesse devenait constante.

Si nous combinons les formules (1) et (3), nous en tirons d'abord

$$v = \frac{\delta e}{\delta t},$$

d'où, en variant de nouveau,

$$\delta' v = \delta' \frac{\delta e}{\delta t}.$$

Mais

$$\delta' v = \varphi \delta' t,$$

par conséquent

$$\varphi \delta' t = \delta' \frac{\delta e}{\delta t},$$

d'où

$$\varphi = \frac{\delta' \frac{\delta e}{\delta t}}{\varphi' t}. \quad (8)$$

On en conclut que l'accroissement de vitesse, après chaque unité de temps, est égale à la dérivée seconde de l'espace varié par rapport au temps.

Si nous supposons qu'à l'origine du temps t le corps reçoive une impulsion capable de lui imprimer une vitesse a, les équations deviennent

$$v = \varphi t + a$$

$$e = \frac{\varphi t^2}{2} + at.$$

En nous servant de la notation adoptée précédemment pour les variations secondes, troisièmes, etc., nous pourrons mettre l'équation (8) sous la forme

$$\delta' \delta e = \varphi \delta t\, \delta' t.$$

Digitized by Google

Mais n'oublions pas que cette équation n'est qu'une notation plus simple de l'équation (8).

75. Après le mouvement uniformément varié vient le mouvement varié suivant certaines lois : telle est par exemple la loi de mouvement que suivrait un corps tombant d'une très-grande hauteur ; dans ce cas il faut avoir égard à la loi de gravitation universelle, d'après laquelle *les corps s'attirent en raison inverse du carré des distances.* Nous avons pu faire abstraction de cette loi en considérant la chute des corps à la surface de la terre, parce que dans ce cas les effets de la loi deviennent imperceptibles, vu la grande longueur du rayon terrestre relativement à l'espace parcouru par les corps.

Si nous nommons x l'espace parcouru pendant le temps t, et v la vitesse acquise après ce temps, nous aurons, en représentant par δx l'accroissement que prendrait l'espace pendant le temps δt, si la loi d'accroissement devenait uniforme, c'est-à-dire si v devenait constant,

$$\delta x = v\,\delta t. \quad (1)$$

Mais v est aussi une fonction de t qui ne varie pas uniformément avec le temps. Pour arriver à la valeur de x en fonction de t, il faut donc déterminer préalablement la valeur de v en fonction de cette variable. Or, la loi d'accroissement de v varie avec le temps. Pour arriver à la valeur de v, nous devons donc nécessairement passer par une seconde variation, c'est-à-dire voir quel accroissement prendrait v pendant le temps $\delta' t$, si la loi d'accroissement restait la même qu'à l'instant t.

Si nous représentons par φ l'accroissement que prendrait dans ce cas la vitesse pendant l'unité de temps, il vient

$$\delta' v = \varphi\,\delta' t. \quad (2)$$

Reste maintenant à déterminer la valeur de φ après le temps t. A cet effet, remarquons que φ varie en raison inverse du carré

de la distance du corps au centre d'attraction. Nous connaîtrions donc φ si nous connaissions la valeur de la gravité en un point quelconque. Or, s'il s'agit d'un corps qui tombe sur la terre, nous savons qu'à la surface de cette planète la gravité est $g = 9{,}8808$.

Supposons que C (fig. 6) marque le centre de la terre, A le point où s'est trouvé le corps à l'origine de sa chute, B celui où il se trouve après le temps t, soit R un point de la surface de la terre. Représentons par a la distance primitive AC du corps au centre de la terre, et r le rayon de celle-ci, AB sera égale à x. Puisqu'il faut déterminer la valeur de φ au point B, il faut donc chercher la valeur de la gravité à la distance $(a - x)$. Or

$$\varphi : g :: r^2 : (a - x)^2,$$

par conséquent

$$\varphi = \frac{gr^2}{(a - x)^2}.$$

Si nous substituons cette valeur dans (2), cette équation devient

$$\delta' v = \frac{gr^2}{(a - x)^2} \delta' t. \quad (3)$$

Mais x étant une fonction de t, nous ne pouvons déterminer directement la valeur de la vitesse en fonction du temps; il faut donc rapprocher l'équation (3) de l'équation (1)

$$\delta x = v \, \delta t. \quad (1)$$

Or, sans rien ôter à la généralité des thèmes de variation, nous pouvons supposer $\delta' t = \delta t$, c'est-à-dire regarder le thème de la variation de v comme identique à celui de x; il vient par conséquent, en mettant au lieu de δt sa valeur tirée de (1),

$$\delta v = \frac{gr^2}{(a - x)^2} \cdot \frac{\delta x}{v},$$


Digitized by Google

ou

$$v\delta v = \frac{gr^2\,\delta x}{(a-x)^2},$$

d'où l'on tire, en appliquant les procédés d'analepsie,

$$\frac{v^2}{2} = \frac{gr^2}{(a-x)} + \mathrm{C},$$

ou

$$v^2 = \frac{2gr^2}{(a-x)} + \mathrm{C}. \quad (4)$$

Or, nous savons que $v = 0$ quand $x = 0$, par conséquent

$$0 = \frac{2gr^2}{a} + \mathrm{C},$$

d'où

$$\mathrm{C} = -\frac{2gr^2}{a}.$$

L'équation (4) devient, en y mettant au lieu de C sa valeur,

$$v^2 = \frac{2gr^2}{a-x} - \frac{2gr^2}{a}. \quad (5)$$

Telle est l'équation qui donne la valeur de la vitesse en fonction de l'espace et réciproquement. Mais ces deux éléments dépendant du temps t, nous devons tâcher de trouver la valeur de l'un d'eux en fonction de cette variable.

L'équation (1) donne

$$v = \frac{\delta x}{\delta t}.$$

Si nous substituons cette valeur dans (5), nous trouvons

$$\left(\frac{\delta x}{\delta t}\right)^2 = \frac{2gr^2}{a-x} - \frac{2gr^2}{a},$$

d'où

$$\frac{\delta x}{\delta t} = \sqrt{\frac{2gr^2}{a-x} - \frac{2gr^2}{a}},$$

d'où, en multipliant par $\delta t \sqrt{a-x}$,

$$\delta x \sqrt{a-x} = \sqrt{2gr^2 - \frac{2gr^2(a-x)}{a}}\, \delta t,$$

ou

$$\delta x \sqrt{a-x} = \sqrt{\frac{2gr^2}{a}} \sqrt{a-a+x}\, \delta t = \sqrt{x} \sqrt{\frac{2gr^2}{a}}\, \delta t,$$

par conséquent

$$\frac{\delta x \sqrt{a-x}}{\sqrt{x}} = \frac{(a-x)\,\delta x}{\sqrt{ax-x^2}} = \sqrt{\frac{2gr^2}{a}}\, \delta t,$$

d'où l'on tire, par analepsie,

$$t\sqrt{\frac{2gr^2}{a}} = \int \frac{(a-x)\,\delta x}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

L'expression $\frac{(a-x)\,\delta x}{\sqrt{ax-x^2}}$ représentant la variation de l'ordonnée d'une cycloïde rapportée à son sommet, on trouve pour son intégrale

$$t\sqrt{\frac{2gr^2}{a}} = \sqrt{ax-x^2} + \frac{a}{2} \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{a-2x}{a}\right).$$

Ici la constante est zéro, parce que $t = 0$ quand $x = 0$.

Si nous cherchons la vitesse acquise par le corps quand il arrive à la surface de la terre, nous trouvons, en nommant h la distance du point A à la surface de la terre, d'où $a = h + r$, et faisant $x = h$ dans (5),

$$v = \sqrt{2gr} \sqrt{1 - \frac{r}{r+h}} =$$

$$\sqrt{2gr} \sqrt{\frac{h}{r+h}} = \sqrt{2gh} \sqrt{\frac{r}{r+h}}.$$

La quantité $\sqrt{2gh}$ exprime la vitesse qu'aurait acquise le

corps s'il était tombé d'une hauteur h, en supposant pendant tout ce trajet la force de gravité constante et égale à g. Il s'ensuit, comme on pouvait le prévoir d'ailleurs, que la vitesse acquise est moindre quand on a égard à la loi de gravitation que lorsqu'on en fait abstraction.

Nous serions arrivé au même résultat en traitant la question plus analytiquement. Reprenons en effet les équations (1) et (3).

L'équation (1) donne

$$v = \frac{\delta x}{\delta t}.$$

Puisque v est fonction de t, nous pouvons varier une seconde fois par rapport à cette variable, ce qui donne

$$\frac{\delta' v}{\delta' t} = \frac{\delta' \frac{\delta x}{\delta t}}{\delta' t},$$

mais l'équation (3) donne

$$\frac{\delta' v}{\delta' t} = \varphi = \frac{gr^2}{(a-x)^2}.$$

Il vient par conséquent

$$\frac{\delta' \frac{\delta x}{\delta t}}{\delta' t} = \frac{gr^2}{(a-x)^2}. \quad (6)$$

Si nous multiplions les deux membres de cette équation par la variation de x par rapport au temps, c'est-à-dire par $\delta' x$ ou $\frac{\delta' x}{\delta' t}\,\delta' t$, il vient

$$\frac{\delta' \frac{\delta x}{\delta t}}{\delta' t} \cdot \frac{\delta' x}{\delta' t}\,\delta' t = \frac{gr^2\,\delta' x}{(a-x)^2}$$

mais

$$\frac{\delta' x}{\delta' t} = \frac{\delta x}{\delta t},$$

par conséquent

$$\frac{\delta x}{\delta t}\,\frac{\delta' \frac{\delta x}{\delta t}}{\delta' t}\,\delta' t = \frac{gr^2\,\delta' x}{(a - x)^2},$$

d'où l'on tire, par analepsie,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\delta x}{\delta t}\right)^2 = \frac{gr^2}{a - x} + \mathrm{C},$$

ou

$$\left(\frac{\delta x}{\delta t}\right)^2 = \frac{2gr^2}{a - x} + \mathrm{C},$$

équation que nous avons obtenue plus haut et qui s'analepse en la comparant à l'équation variée de la cycloïde.

Nous avons exposé cette seconde marche parce qu'elle est plus générale et qu'elle s'applique à une foule de problèmes sur le mouvement des corps. D'un autre côté, elle nous conduit à une remarque de la plus haute importance. Nous voulons parler d'une erreur grave à laquelle nous mènent les principes du calcul différentiel. En raisonnant d'après les principes du calcul infinitésimal, on arrive, pour la solution du même problème, aux formules suivantes :

$$dv = \varphi dt \quad (a)$$

$$dx = v dt \quad (b)$$

$$d^2 x = \varphi\,\overline{dt}^2 \quad (c),$$

dans lesquelles, conformément aux principes du calcul différentiel, la quantité *dt* est constante et conserve toujours la même valeur quel que soit *t*; nous pourrons donc éliminer *dt* entre ces trois équations; or, si nous prenons la valeur de

Digitized by Google

cette quantité dans (a) pour la substituer dans (c), nous trouvons

$$d^2 x = \frac{\overline{dv}^2}{\varphi}$$

ou

$$\varphi\, d^2x = \overline{dv}^2. \quad (\alpha)$$

Si nous éliminons cette même quantité entre (b) et (c), il vient

$$d^2x = \frac{\varphi}{v^2}\, \overline{dx}^2. \quad (\beta)$$

L'équation (α) conduit à un résultat faux, et la formule (β) est absurde par elle-même. On ne peut nier cependant que ces équations ne soient des conséquences rigoureuses du calcul différentiel. Pourquoi a-t-on rejeté ces formules? Parce qu'on savait fort bien qu'elles conduisent à des résultats faux; mais on ne s'est jamais demandé pourquoi le calcul conduit ici à des erreurs aussi patentes; du moins si l'on s'est posé cette question, on ne l'a jamais résolue, ni même signalée. Voyons ce que nous dit le calcul des variations sur cette absurdité. Nous sommes arrivé aux formules

$$\frac{\delta' v}{\delta' t} = \varphi$$

$$\frac{\delta x}{\delta t} = v$$

$$\frac{\delta' \dfrac{\delta x}{\delta t}}{\delta' t} = \varphi.$$

La seule inspection de ces formules nous explique clairement d'où vient l'erreur à laquelle nous conduit le calcul différentiel. Nous voyons en effet que l'on suppose que la quantité δt puisse sortir du signe de la seconde variation, tandis qu'elle est en réalité une fonction de t jouant un rôle actif dans l'expression

Digitized by Google

$\frac{\partial x}{\partial t}$. Cette supposition est erronée dans tous les cas ; il s'ensuit nécessairement que dans tout problème où entre un coefficient différentiel du second ordre, le calcul conduit à de semblables erreurs. Voyons cependant ce qui arrive dans la question du mouvement uniformément varié, où l'on parvient aux formules suivantes :

$$\frac{dv}{dt} = \varphi$$

$$\frac{de}{dt} = v$$

$$\frac{d^2e}{dt^2} = \varphi.$$

Si nous éliminons dt entre la première et la troisième, il vient

$$d^2e = \frac{\overline{dv}^2}{\varphi}.$$

Intégrons cette équation, en observant que φ est une constante, nous trouvons

$$de = \frac{vdv}{\varphi}.$$

Intégrant une seconde fois, il vient

$$e = \frac{v^2}{2\varphi},$$

d'où

$$v^2 = 2\varphi e,$$

formule dont l'exactitude est incontestable. Mais peut-on conclure de là à l'exactitude du procédé? Évidemment non, car ce n'est pas la première fois qu'un procédé faux conduit à un résultat exact ; dans le cas qui nous occupe, il est même facile d'expliquer comment il se fait que ce procédé ne nous conduit

pas à une erreur. C'est à cause de la constance de la quantité φ, qui joue un rôle complétement passif dans les intégrations successives de la formule, et rend la seconde variation, sinon illusoire, du moins inutile. Ce qui prouve que dans ce cas même le procédé n'est pas applicable, c'est que si nous éléminons dt entre la deuxième et la troisième équation, nous trouvons

$$d^2e = \frac{\varphi\,\overline{de}^2}{v^2},$$

équation dont l'absurdité est évidente. Toutes ces erreurs deviennent impossibles dans le calcul des variations. A la rigueur on ne pourrait pas éliminer $\delta' t$ et δt entre deux équations; cependant, sans rien ôter à la généralité de ces expressions, on peut les supposer égales, toujours en observant que le δt, engagé sous un signe δ, ne peut jamais être placé en dehors de l'opération marquée par ce signe. Mais il existe un cas d'élimination assez singulier pour mériter de fixer notre attention. Prenons en effet les égalités

$$\frac{\delta x}{\delta t} = v$$

$$\frac{\delta' \frac{\delta x}{\delta t}}{\delta' t} = \frac{\delta \frac{\delta' x}{\delta' t}}{\delta t} = \varphi.$$

Si nous éliminons δt entre ces deux équations, il vient

$$\delta \frac{\delta' x}{\delta' t} = \frac{\varphi\,\delta x}{v},$$

d'où, en remarquant que les variations sont prises par rapport à t,

$$\frac{\delta \frac{\delta' x}{\delta' t}}{\delta t}\,\delta t = \frac{\varphi}{v}\,\frac{\delta x}{\delta t}\,\delta t,$$

ou

$$\frac{\dfrac{\delta \dfrac{\delta' x}{\delta' t}}{\delta t}\,\delta t}{\dfrac{\delta x}{\delta t}} = \frac{\varphi}{v}\,\delta t,$$

mais

$$\frac{\delta' x}{\delta' t} = \frac{\delta x}{\delta t}$$

et

$$v = \varphi t,$$

par conséquent

$$\frac{\delta \dfrac{\delta x}{\delta t}}{\dfrac{\delta x}{\delta t}} = \frac{\delta t}{t},$$

d'où l'on tire par analepsie

$$\lg \frac{\delta x}{\delta t} = \lg t + C,$$

mais nous pouvons mettre C sous la forme $\lg C'$, ce qui donne

$$\lg \frac{\delta x}{\delta t} = \lg C't$$

en passant aux nombres

$$\frac{\delta x}{\delta t} = C't.$$

Reste à déterminer la valeur de la constante C'. Or, $\frac{\delta x}{\delta t}$ marque la vitesse acquise au bout du temps t; par conséquent si nous supposons $t = 0$, il vient $\frac{\delta x}{\delta t} = 0$. Ceci ne nous apprend donc rien sur la valeur de C', mais nous savons qu'après l'unité de temps cette vitesse est φ. Par conséquent

$$\varphi = C',$$

Digitized by Google

d'où

$$\frac{\delta x}{\delta t} = \varphi t.$$

Cette marche n'est pas celle que je conseillerais de suivre dans les applications ; mais je l'ai donnée pour prouver que l'on arrive toujours à un résultat vrai, quand on raisonne d'après les principes du calcul des variations. Dans tous les cas n'oublions jamais que la forme

$$\delta' \delta x = \varphi \, \delta' t \, \delta t \quad (\alpha)$$

donnée à la formule

$$\frac{\delta' \dfrac{\delta x}{\delta t}}{\delta' t} = \varphi \quad (\beta)$$

n'est qu'une simple notation, comme nous l'avons dit précédemment ; de sorte que dans les combinaisons de la formule (α) avec d'autres équations, il est toujours prudent de la remettre sous la forme (β), sinon on s'exposerait à commettre des erreurs très-graves. Car on doit toujours bien distinguer ce qui est notation de ce qui est symbole.

Nous le répétons, la fausseté des principes du calcul différentiel ressort à l'évidence chaque fois qu'un coefficient du second ordre s'introduit dans la question. C'est ainsi que dans le calcul des courbes planétaires, où ces coefficients du second ordre s'introduisent, on est obligé de passer par une intégration très-laborieuse avant de pouvoir éliminer le temps. Cependant le calcul différentiel ne donne nullement la raison de cette nécessité d'une intégration préalable [1]. On a vu que sans cette

[1] J'ai sous les yeux une lettre que M. Passot adresse à l'Académie des sciences de Paris. Cette lettre termine une discussion que son auteur a soutenue contre certains membres de cette Académie, au sujet de sa *Théorie des forces centrales*. M. Passot présente quelques objections qui ne sont pas sans fondement; mais ayant méconnu la véritable cause des erreurs

précaution on arrive à un résultat faux; et sans s'enquérir de la cause de cette erreur, on s'est soumis à la règle. Si cette conduite est sage, elle n'est pas scientifique; car en science il importe avant tout de connaître le pourquoi d'une chose.

Nous terminons ici le chapitre des applications du calcul analeptique, parce que nous croyons avoir amplement atteint le but que nous nous étions proposé en voulant démontrer que ce calcul parvient à résoudre toutes les questions qui exigeaient l'emploi du calcul intégral. Il nous reste à traiter une troisième et une quatrième partie, ce sont celles des applications du calcul connu ci-devant sous le nom de calcul des variations; ces chapitres n'offrent pas moins d'intérêt que les précédents. Nous aurons encore à signaler plusieurs erreurs dans lesquelles on est tombé sur l'esprit de ce calcul.

qu'il signale, il arrive à cette conclusion erronée : *La mécanique céleste n'a rien de commun avec la mécanique terrestre, telle que l'entendent ceux qui....* Ce qui prouve que M. Passot attribue aux principes de la mécanique une erreur qui a sa source dans les principes du calcul différentiel.

THÉORIE

DES MAXIMA ET DES MINIMA,

APPLIQUÉE

AUX FONCTIONS DE FONCTIONS.

76. Dans les problèmes de maximis et minimis que nous avons traité jusqu'ici, nous n'avons eu égard qu'aux valeurs que peut prendre une fonction d'une variable quand cette variable passe par divers états de grandeur. Mais une quantité peut être fonction d'une autre fonction de la variable indépendante ; dans ce cas on peut se demander quelle serait la forme de cette seconde fonction qui rendrait la fonction principale toujours un maximum ou un minimum pour toutes les valeurs de la variable indépendante. Pour nous faire mieux comprendre posons

$$z = \varphi(x, y)$$

en même temps que

$$y = f(x).$$

Le problème à résoudre consiste à chercher la forme de la fonction exprimant y en x, qui rendra la fonction $\varphi(x, y)$ un maximum ou un minimum. Expliquons-nous : on comprend que, suivant la forme de la fonction $f(x)$, pour chaque valeur de x la fonction principale $\varphi(x, y)$ prendra différentes valeurs ; il s'agit de déterminer la forme de $f(x)$, qui donnera une valeur

maxima ou minima à $\varphi(x, y)$ pour une valeur quelconque de x. Nous supposons donc la forme de $f(x)$ arbitraire, c'est-à-dire, nous supposons que y puisse varier avec x ou indépendamment de cette variable.

Pour que la valeur de y en x rende $\varphi(x, y)$ un maximum, il faut que l'on obtienne toujours pour cette fonction une valeur plus petite, lorsqu'on attribue à y une forme en x, qui donne à cette variable une valeur plus grande ou plus petite que celle qui rend $\varphi(x, y)$ un maximum. Représentons par δy l'accroissement que prend y quand l'expression en x de cette variable change de forme. δy est une fonction quelconque de y et par conséquent de x, mais cette fonction peut varier indépendamment de cette dernière variable.

Ainsi pour que y rende $\varphi(x, y)$ un maximum, il faut que toute forme qui donne à y une valeur plus grande ou plus petite, rende toujours $\varphi(x, y)$ plus petit que la valeur maxima. Les conditions du problème sont donc renfermées dans l'inégalité :

$$\varphi(x, y) > \varphi(x, y \pm \delta y),$$

ou

$$\varphi(x, y \pm \delta y) - \varphi(x, y) < 0.$$

Mais

$$\varphi(x, y \pm \delta y) = \varphi(x, y) \pm \varphi_1(x, y)\,\delta y + \varphi_2(x, y)\frac{\overline{\delta y}^2}{2} \pm \ldots .$$

$\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$.... représentant les dérivées de $\varphi(x, y)$ par rapport à y ; la condition du maximum devient donc

$$(1)\quad \pm \varphi_1(x, y)\,\delta y + \varphi_2(x, y)\frac{\overline{\delta y}^2}{2} \pm \varphi_3(x, y)\frac{\overline{\delta y}^3}{2.3} + \ldots < 0.$$

Cette inégalité doit être satisfaite quelle que soit la valeur de δy ; elle devra donc l'être encore quand δy sera assez petit pour que le signe du premier terme décide du signe de toute la série ; on doit avoir, dans ce cas,

$$\pm \varphi_1(x, y)\,\delta y < 0.$$

Or, quel que soit le signe de $\varphi_1(x, y)$, cette condition ne peut être satisfaite ; pour qu'il y ait possibilité de rendre $\varphi(x, y)$ un maximum, il faut donc que l'on ait

$$\varphi_1(x, y) = 0. \quad (a)$$

Cette valeur de la dérivée première transforme la condition (1) en la suivante

$$+ \varphi_2(x, y)\frac{\overline{\delta y}^2}{2} \pm \varphi_3(x, y)\frac{\overline{\delta y}^3}{2.3} + \ldots . < 0,$$

laquelle devant être également satisfaite pour toutes les valeurs de δy, devra l'être encore quand cette quantité sera assez petite pour rendre le premier terme à lui seul plus grand que l'ensemble de tous les autres. Le signe de ce terme décide, dans ce cas, de celui de toute la série ; pour que y rende $\varphi(x, y)$ un maximum, il faut donc que

$$\varphi_2(x, y)\frac{\overline{\delta y}^2}{2} < 0$$

ou

$$\varphi_2(x, y) < 0. \quad (b)$$

La condition (a) donnera la valeur de y en x qui peut rendre $\varphi(x, y)$ un maximum, mais pour que y donne lieu à une pareille valeur, il faut que cette fonction satisfasse à la condition (b) ; c'est-à-dire il faut qu'elle rende la dérivée seconde négative pour toutes les valeurs de x.

Pour avoir les conditions du minimum, il suffit de changer le signe < 0 en > 0, dans l'inégalité (1) ; ceci résulte de ce que pour le minimum la valeur de la fonction doit être plus grande quand y augmente ou diminue. Cette condition (1) devient ainsi

$$\pm \varphi_1(x, y)\,\delta y + \varphi_2(x, y)\frac{\overline{\delta y}^2}{2} \pm \varphi_3(x, y)\frac{\overline{\delta y}^3}{2.3} + \ldots . > 0,$$

d'où l'on déduit, par des raisonnements identiques à ceux que nous avons établis pour le maximum,

$$\varphi_1(x, y) = 0 \quad (a')$$

$$\varphi_2(x, y) < 0. \quad (b')$$

On voit que la première condition est la même que pour le maximum ; mais il est à remarquer que la valeur de y en x qui satisfait à la condition (a) ou (a') ne donne pas nécessairement lieu à un maximum ou à un minimum, comme cela arrive quand on ne considère qu'une simple fonction d'une variable indépendante ; car il faut que la fonction qui rend $\varphi(x, y)$ un maximum non-seulement rende nulle la dérivée $\varphi_1(x, y)$, mais il faut encore qu'elle soit telle qu'elle rende $\varphi_2(x, y)$ négative pour toutes les valeurs de x, c'est-à-dire que $\varphi_2(x, y)$ doit être une fonction qui ne puisse changer de signe quand on y fait varier x. Pour le minimum, la fonction $\varphi_2(x, y)$ doit rester constamment positive.

Quand cette valeur de y en x sera déterminée, on conçoit que l'on pourra encore appliquer à la fonction $\varphi(x, y)$ les considérations de maximis et minimis relatives aux valeurs de x.

Si l'on désirait simplement avoir les conditions de maximis et minimis pour une valeur particulière de x, alors il faudrait chercher la valeur correspondante de y qui satisfait à la condition (a), la substituer dans $\varphi_2(x, y)$, et voir si elle rend cette dérivée positive ou négative. Dans le premier cas elle donne lieu à un minimum et dans le second à un maximum. Mais ce dernier problème n'a rien de commun avec celui que nous nous sommes posé d'abord. Il n'y a que les conditions, sous forme brute, qui soient les mêmes.

On pourrait se demander s'il peut y avoir plusieurs fonctions de x qui, substituées à la place de y dans $\varphi(x, y)$, rendent cette fonction soit un maximum soit un minimum ; évidemment oui. Car la dérivée $\varphi_1(x, x) = 0$ peut s'annuler, dans certains cas, de différentes manières ; c'est-à-dire qu'il peut exister plusieurs fonctions de y en x qui annulent cette dérivée. Tel serait, par exemple, le cas où elle se composerait de plusieurs facteurs en x et en y, qui s'annulant d'une manière différente, annuleraient aussi la fonction $\varphi_1(x, y)$. Parmi ces fonctions il pourrait y en avoir deux ou plusieurs qui satisfassent à la

Google

condition (b), de même pour la condition (b'), c'est-à-dire qu'il peut exister plusieurs formes maxima ou minima. Nous savons que dans ce cas nous devons restreindre le sens des mots maximum et minimum, et entendre par là des valeurs constamment plus grandes ou plus petites que toutes les valeurs que prend $\varphi(x, y)$ quand on donne un accroissement ou un décroissement quelconque, mais très-petit à y.

Il serait curieux de voir quelles formes successives prend la fonction $f(x)$ pour passer d'une valeur maxima à une valeur minima et réciproquement. Mais nous laissons à d'autres le soin de faire ces investigations qui sont, en général, plus curieuses qu'utiles.

77. On pourrait encore avoir

$$v = \varphi(x, y, z)$$

en même temps que

$$y = f(x) \text{ et } z = F(x)$$

et se demander quelle forme doivent prendre les fonctions $f(x)$ et $F(x)$ pour rendre v soit un maximum soit un minimum. Puisque y et z peuvent varier indépendamment de x, représentons par δy et δz des accroissements quelconques de ces variables indépendantes. Ces accroissements sont des fonctions quelconques de y et de z qui peuvent varier avec ou sans x. Pour que v soit un maximum on doit avoir

$$\varphi(x, y \pm \delta y, z \pm \delta z) < \varphi(x, y, z),$$

ou

$$\varphi(x, y \pm \delta y, z \pm \delta z) - \varphi(x, y, z) < 0.$$

Mais

$$\varphi(x, y \pm \delta y, z \pm \delta z) =$$

$$\varphi(x, y, z) \pm \varphi_{,}(x, y, z)\,\delta y + \varphi_{,,}(x, y, z)\,\frac{\overline{\delta y}^2}{2} \pm \ldots$$

$$\pm {}_{,}\varphi(x, y, z)\,\delta z \pm {}_{,}\varphi_{,}(x, y, z)\,\delta y\,\delta z \pm \ldots$$

$$+ {}_{,,}\varphi(x, y, z)\,\frac{\overline{\delta z}^2}{2} \pm \ldots$$

$$\pm \ldots$$

la condition du maximum devient donc

$$\left.\begin{array}{r}\pm\,\varphi_{,}(x,y,z)\,\delta y+\varphi_{,,}(x,y,z)\,\dfrac{\overline{\delta y}^2}{2}\pm\ldots\\ \pm\,{}_{,}\varphi(x,y,z)\,\delta z\pm{}_{,}\varphi_{,}(x,y,z)\,\delta y\,\delta z\pm\ldots\\ +\,{}_{,,}\varphi(x,y,z)\,\dfrac{\overline{\delta z}^2}{2}\pm\ldots\end{array}\right\}<0,\qquad(1)$$

d'où l'on déduit par des raisonnements bien connus

$$\pm\,\varphi_{,}(x,y,z)\,\delta y\pm{}_{,}\varphi(x,y,z)\,\delta z<0.$$

Et puisque δy et δz sont indépendants

$$\pm\,\varphi_{,}(x,y,z)\,\delta y<0\quad\text{et}\quad\pm\,\varphi_{,}(x,y,z)\,\delta z<0,$$

inégalités qui ne peuvent être satisfaites et qui exigent par conséquent que l'on ait

$$\varphi_{,}(x,y,z)=0\quad\text{et}\quad{}_{,}\varphi(x,y,z)=0.\qquad(a)$$

D'après cela on tire de la condition fondamentale (1),

$$\varphi_{,,}(x,y,z)\,\frac{\overline{\delta y}^2}{2}\pm{}_{,}\varphi_{,}(x,y,z)\,\delta y\,\delta z+{}_{,,}\varphi(x,y,z)\,\frac{\overline{\delta y}^2}{2}<0,$$

d'où l'on déduit les trois conditions nécessaires pour l'existence d'un maximum

$$\varphi_{,,}(x,y,z)<0,\qquad{}_{,,}\varphi(x,y,z)<0$$

$$\text{et}\quad\varphi_{,,}(x,y,z).\,{}_{,,}\varphi(x,y,z)>\overline{{}_{,}\varphi_{,}(x,y,z)}^2.$$

Pour avoir les conditions du minimum il suffit de changer dans (1) le signe <0 en >0; on en déduit les cinq conditions à satisfaire pour que les fonctions $f(x)$ et $F(x)$ rendent $\varphi(x,y,z)$ un minimum; elles sont

$$\varphi_{,}(x,y,z)=0,\quad{}_{,}\varphi(x,y,z)=0,\quad\varphi_{,,}(x,y,z)>0,$$

$${}_{,,}\varphi(x,y,z)>0\quad\text{et}\quad\varphi_{,,}(x,y,z).\,{}_{,,}\varphi(x,y,z)>\overline{{}_{,}\varphi_{,}(x,y,z)}^2.$$

Tous ces résultats sont trop connus pour que nous nous arrêtions à les expliquer plus amplement. Nous passerons donc immédiatement à des considérations d'une autre nature sur la même théorie.

78. Une quantité peut non-seulement être fonction d'une variable indépendante et d'une fonction de cette variable, mais en outre elle peut encore dépendre de la dérivée de cette dernière. Ce cas se présente quelquefois en mécanique. Il peut se résumer dans la forme

$$z = \varphi\,(x,\ y,\ y')$$

dans laquelle on a

$$y = f\,(x)$$

et

$$y' = \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta .\, f\,(x)}{\delta x}.$$

On demande quelle forme doit avoir la fonction $f(x)$ pour rendre z un maximum ou un minimum. Malgré qu'il y ait les deux quantités y et y' qui sont variables dans cette fonction, on ne peut cependant disposer que d'un seul élément qui est la forme de $f(x)$. Quand cette forme est déterminée, celle de y' l'est également. Nous savons que la forme de la fonction $f(x)$ qui rend z un maximum, doit être telle qu'en attribuant à l'expression de y en x une forme qui donne à y une valeur plus grande ou plus petite, le résultat de la substitution soit toujours plus petit que la valeur maxima de z.

Nommons δy l'accroissement que prend y quand on fait varier la forme de la fonction $f(x)$. Cet accroissement, quoique pouvant varier indépendamment de x, est cependant une fonction de cette variable, puisqu'il est fonction de y, de sorte que pour avoir la valeur de z quand on attribue cet accroissement à y, nous devons voir quel accroissement prend y' quand y reçoit l'accroissement δy.

Mais

$$y' = \frac{\delta y}{\delta x},$$

par conséquent

$$y'_{y \pm \delta y} = \frac{\delta.(y \pm \delta y)}{\delta x} = \frac{\delta y}{\delta x} \pm \frac{\delta.\delta y}{\delta x}.$$

Ainsi quand y devient $y \pm \delta y$, y' devient $y' \pm \frac{\delta.\delta y}{\delta z}$; z deviendra donc dans le même cas

$$z = \varphi\left(x,\ y \pm \delta y,\ y' \pm \frac{\delta.\delta y}{\delta x}\right).$$

Or, pour que y rende z un maximum, il faut que

$$\varphi\left(x,\ y \pm \delta y,\ y' \pm \frac{\delta.\delta y}{\delta x}\right) < \varphi\,(x,\ y,\ z).$$

La condition fondamentale du maximum sera donc

$$\varphi\left(x,\ y \pm \delta y,\ y' \pm \frac{\delta.\delta y}{\delta x}\right) - \varphi\,(x,\ y,\ z) < 0,$$

ou, en remarquant que

$$\varphi\left(x,\ y \pm \delta y,\ y' \pm \frac{\delta.\delta y}{\delta x}\right) =$$

$$\varphi\,(x,\ y,\ z) \pm \varphi_{,}\,(x,\ y,\ y')\,\delta y + \varphi_{,,}\,(x,\ y,\ y')\,\frac{\overline{\delta y}^2}{2} \quad \pm \cdots$$

$$\pm\,{}_{,}\varphi\,(x,\ y,\ y')\,\frac{\delta.\delta y}{\delta x} + {}_{,}\varphi_{,}\,(x,\ y,\ y')\,\delta y\,\frac{\delta.\delta y}{\delta x} \pm \cdots$$

$$+\,{}_{,,}\varphi\,(x,\ y,\ y')\,\frac{1}{2}.\left(\frac{\delta.\delta y}{\delta x}\right)^2 \pm \cdots$$

${}_{,}\varphi\,(x,\ y,\ y')$, ${}_{,,}\varphi\,(x,\ y,\ y')$... désignant les dérivées successives de $\varphi\,(x,\ y,\ y')$ par rapport à y',

$$\left.\begin{array}{r}\pm\,\varphi_1(x,y,y')\,\delta y+\varphi_2(x,y,y')\,\dfrac{\overline{\delta y}^2}{2}\qquad\pm\ldots\\ \pm\,{}_1\varphi(x,y,y')\,\dfrac{\delta.\,\delta y}{\delta x}+{}_1\varphi_1(x,y,y')\,\delta y.\,\dfrac{\delta.\,\delta y}{\delta x}\pm\ldots\\ +\,{}_2\varphi(x,y,y')\,\dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{\delta.\,\delta y}{\delta x}\right)^2\pm\ldots\end{array}\right\}<0.\quad(1)$$

Cette inéquation devant être satisfaite pour toutes les valeurs de δy, elle devra l'être encore quand δy sera assez petit et d'une forme propre à rendre l'ensemble des deux premiers termes à lui seul plus grand que l'ensemble des autres termes de la série. La forme de δy doit donc être telle que $\frac{\delta.\,\delta y}{\delta x} < \delta y$. Dans ce cas le signe de la série dépend du signe des deux premiers termes ; de sorte que l'on doit avoir nécessairement

$$\pm\left[\varphi_1(x,y,y')\,\delta y+{}_1\varphi(x,y,z)\,\frac{\delta.\,\delta y}{\delta x}\right]<0.$$

Or, quel que soit le signe de l'expression entre [ ], cette inégalité ne peut être satisfaite ; pour que $f(x)$ rende z un maximum il faut donc que l'on ait

$$\varphi_1(x,y,y')\,\delta y+{}_1\varphi(x,y,y')\,\frac{\delta.\,\delta y}{\delta x}=0.\quad[\mathrm{A}]$$

Cette condition transforme l'inégalité (1) en la suivante

$$\left.\begin{array}{r}\varphi_2(x,y,y')\,\dfrac{\overline{\delta y}^2}{2}\quad\pm\ldots\\ +\,{}_1\varphi_1(x,y,y')\,\delta y\,\dfrac{\delta.\,\delta y}{\delta x}\pm\ldots\\ +\,{}_2\varphi(x,y,y')\,\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\delta.\,\delta y}{\delta x}\right)^2\pm\ldots\end{array}\right\}<0.$$

Par un raisonnement identique à celui qui nous a conduit à



la formule [A], on déduit de cette inégalité, comme condition à satisfaire dans le cas du maximum,

$$\varphi_2(x,y,y')\frac{\overline{\delta y^2}}{2}+{}_1\varphi_1(x,y,y')\,\delta y.\frac{\delta.\delta y}{\delta x}$$
$$+{}_2\varphi(x,y,y')\frac{1}{2}\left(\frac{\delta.\delta y}{\delta x}\right)^2<0.\quad [B]$$

Telles sont les conditions auxquelles doit satisfaire $f(x)$ pour rendre z un maximum. Mais sous cette forme il est impossible de les interpréter, car nous ne pouvons connaître les relations qui existent entre δy et $\frac{\delta.\delta y}{\delta x}$, puisque la fonction δy est arbitraire. Il importe donc de faire subir aux conditions [A] et [B] une transformation qui les rendent d'une interprétation plus facile. C'est de cette transformation que nous allons nous occuper immédiatement. Pour plus de simplicité nous poserons

$$\varphi_1(x,y,y')=\mathrm{N}$$

et

$$ {}_1\varphi(x,y,y')=\mathrm{P}.$$

D'après cela la condition [A] devient

$$\mathrm{N}\,\delta y+\mathrm{P}\frac{\delta.\delta y}{\delta x}=0,\quad [A']$$

dans laquelle nous devons faire sortir la quantité δy du signe de la variation sous lequel elle est engagée. Or, remarquons que P est en général une fonction de x aussi bien que δy ; on aura donc en vertu de la règle de l'analepsie par parties, § 53,

$$\int \mathrm{P}\frac{\delta.\delta y}{\delta x}\,\delta x=\mathrm{P}\delta y-\int\delta y.\frac{\delta\mathrm{P}}{\delta x}\,\delta x,$$

d'où l'on tire par la variation

$$\mathrm{P}\frac{\delta.\delta y}{\delta x}\,\delta x=\delta.\,\mathrm{P}\delta y-\delta y.\frac{\delta\mathrm{P}}{\delta x}\,\delta x,$$


Digitized by Google

ou

$$P \frac{\delta . \delta y}{\delta x} = \frac{\delta . P\delta y}{\delta x} - \delta y . \frac{\delta P}{\delta x}.$$

Si nous substituons cette valeur dans l'équation [A'] elle devient

$$N \, \delta y + \frac{\delta . P\delta y}{\delta x} - \delta y . \frac{\delta . P}{\delta x} = 0,$$

ou

$$\left[N - \frac{\delta . P}{\delta x}\right] \delta y + \frac{\delta . P\delta y}{\delta x} = 0. \quad (\alpha)$$

Cette équation doit être satisfaite pour toutes les valeurs de δy. Le premier membre devra donc encore être nul, quand on aura

$$\delta y = \frac{C}{P}.$$

C désignant une constante quelconque, or dans ce cas (α) devient

$$\left[N - \frac{\delta . P}{\delta x}\right] \delta y = 0,$$

et puisque δy n'est pas nul, on devra avoir

$$N - \frac{\delta . P}{\delta x} = 0. \quad (a)$$

L'équation (α) devient par conséquent

$$\frac{\delta . P\delta y}{\delta x} = 0,$$

d'où l'on tire, par analepsie,

$$P . \delta y = C. \quad (1)$$

Il faut donc que ce produit soit constant, c'est-à-dire indépendant de x ; mais δy est indépendant de x, il faut donc aussi que P soit constant, d'où l'on conclut que la fonction qui ren-

dra $\varphi(x, y, y')$ un maximum, doit encore satisfaire l'équation

$$P = C. \quad (b)$$

Avant d'aller plus loin, nous devons nous arrêter quelques instants pour prévenir le reproche d'inconséquence qui pourrait nous être adressé relativement au caractère de la quantité δy. On pourrait nous dire que dans toutes les transformations qui nous ont conduit à l'équation (1), nous avons regardé δy comme une fonction de x, tandis qu'à partir de ce point nous regardons cette même quantité comme constante, c'est-à-dire indépendante de x. Cette contradiction apparente est facile à expliquer. Nous avons toujours dit que la quantité δy est complétement indépendante de x, mais dans les transformations du calcul des variations nous avons toujours considéré la fonction qui exprime δy en y, et par conséquent en x. C'est sur cette propriété que se basent toutes les transformations qui nous ont conduit aux caractères distinctifs des dérivées et des variations ; de sorte que chaque fois que la quantité δy se trouvera engagée sous le signe de la variation, ce n'est plus la quantité en elle-même que l'on considère, mais bien son expression en x. Il en est encore de même quand δy se trouve lié d'une manière invariable à δx. En dehors de ces cas, c'est-à-dire quand δy entre seul dans une équation ou un calcul, on doit lui attribuer sa véritable nature qui est d'être indépendante.

On conçoit aussi que la fonction qui exprime δy en x étant arbitraire, on ne pourra jamais se faire une idée de sa variation ni de sa dérivée, de sorte que chaque fois que δy sera engagé dans une variation, tous nos efforts doivent tendre à l'en dégager afin de pouvoir lui attribuer son véritable caractère, qui est le seul qui soit d'une interprétation facile. Telle est la raison de la transformation que nous venons de faire et de celles que nous ferons par la suite.

Cela posé, continuons nos recherches relatives aux conditions

Digitized by Google

auxquelles doit satisfaire la fonction $f(x)$ pour rendre $\varphi\,(x, y, y')$ un maximum. La condition première [A] nous a conduit aux conditions résultantes (a) et (b). Reste à déduire celles qui découlent de l'inégalité [B] dans laquelle nous posons, pour abréger, $\varphi_{,}\,(x, y, y') = \mathrm{N}$ et $_{,}\varphi\,(x, y, y') = \mathrm{P}$. Elle devient par conséquent

$$\frac{\delta.\,\mathrm{N}}{\delta y}.\frac{\overline{\delta y}^2}{2}+\frac{\delta.\,\mathrm{N}}{\delta y'}.\,\delta y.\,\frac{\delta.\,\delta y}{\delta x}+\frac{\delta.\,\mathrm{P}}{\delta y'}.\frac{1}{2}\left(\frac{\delta.\,\delta y}{\delta x}\right)^2<0. \quad (2)$$

Cette inégalité doit être satisfaite pour toutes les valeurs de δy. Mais on peut avoir, d'après la forme de δy, $\delta y > \frac{\delta.\,\delta y}{\delta x}$, et cette différence peut être telle que le signe du premier terme décide de celui de toute l'expression, il faut donc que l'on ait

$$\frac{\delta.\,\mathrm{N}}{\delta y}\,\frac{\overline{\delta y}^2}{2}<0$$

ou

$$\frac{\delta.\,\mathrm{N}}{\delta y}<0, \quad (c)$$

de même l'expression de δy en x peut être de forme telle que $\delta y < \frac{\delta.\,\delta y}{\delta x}$; et cette différence peut être assez grande pour rendre le dernier terme plus grand que l'ensemble des deux premiers; dans ce cas le signe de l'expression dépend de celui de son dernier terme, ce qui exige que l'on ait pour le maximum

$$\frac{\delta.\,\mathrm{P}}{\delta y'}<0. \quad (d)$$

Enfin pour que l'expression (2) reste toujours négative, il faut que le second terme ne puisse pas en faire changer le signe, en d'autres termes il faut que le terme du milieu soit toujours plus petit que l'ensemble des deux extrêmes. Ainsi

$$\frac{\delta.\,\mathrm{N}}{\delta y}.\frac{\overline{\delta y}^2}{2}+\frac{\delta.\,\mathrm{P}}{\delta y'}.\frac{1}{2}\left(\frac{\delta.\,\delta y}{\delta x}\right)^2>\frac{\delta.\,\mathrm{N}}{\delta y'}.\,\delta y.\,\frac{\delta.\,\delta y}{\delta x}$$


Google

ou

$$\frac{\delta.\mathrm{N}}{\delta y}\cdot\frac{\overline{\delta y}^2}{2}+\frac{\delta.\mathrm{P}}{\delta y'}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\delta.\delta y}{\delta x}\right)^2-\frac{\delta.\mathrm{N}}{\delta y'}\cdot\delta y\cdot\frac{\delta.\delta y}{\delta x}>0.$$

Or, pour que cette inégalité soit toujours satisfaite, il faut que l'équation

$$\frac{\delta.\mathrm{N}}{\delta y}\cdot\frac{\overline{\delta y}^2}{2}-\frac{\delta.\mathrm{N}}{\delta y'}\cdot\delta y\,\frac{\delta.\delta y}{\delta x}+\frac{\delta.\mathrm{P}}{\delta y'}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\delta.\delta y}{\delta x}\right)^2=0 \quad (3)$$

ne puisse jamais l'être; c'est-à-dire que résolue par rapport à $\dfrac{\delta y}{\dfrac{\delta.\delta y}{\delta x}}$, elle doit toujours donner des racines imaginaires. Or, si de l'équation (3) on tire la valeur de ce rapport, on trouve

$$\frac{\delta y}{\dfrac{\delta.\delta y}{\delta x}}=\frac{\dfrac{\delta.\mathrm{N}}{\delta y'}}{\dfrac{\delta.\mathrm{N}}{\delta y}}\pm\sqrt{\frac{\left(\dfrac{\delta.\mathrm{N}}{\delta y'}\right)^2-\dfrac{\delta.\mathrm{N}}{\delta y}\cdot\dfrac{\delta.\mathrm{P}}{\delta y'}}{\left(\dfrac{\delta.\mathrm{N}}{\delta y}\right)^2}}$$

Pour que ces racines soient toujours imaginaires il faut que

$$\left(\frac{\delta.\mathrm{N}}{\delta y'}\right)^2-\frac{\delta.\mathrm{N}}{\delta y}\cdot\frac{\delta.\mathrm{P}}{\delta y'}<0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\delta.\mathrm{N}}{\delta y}\cdot\frac{\delta.\mathrm{P}}{\delta y'}>\left(\frac{\delta.\mathrm{N}}{\delta y'}\right)^2.$$

Dans le cas du maximum il faut donc en outre que la fonction $f(x)$ satisfasse à la condition

$$\varphi_2(x,y,y')\cdot{}_2\varphi(x,y,y')>\overline{{}_1\varphi_1(x,y,y')}^2. \quad (e)$$

En nous résumant, les conditions du maximum sont donc

$$\varphi_1(x,y,y')-\frac{\delta.{}_1\varphi(x,y,y')}{\delta x}=0 \quad (a)$$

$${}_1\varphi(x,y,y')=\mathrm{C}. \quad (b) \qquad {}_2\varphi(x,y,y')<0. \qquad \varphi_2(x,y,y')<0.$$

$$\text{et}\quad \varphi_2(x,y,y')\cdot{}_2\varphi(x,y,y')>\overline{{}_1\varphi_1(x,y,y')}^2.$$

En raisonnant de même pour le minimum on arriverait aux cinq conditions suivantes

$$\varphi_{,}(x, y, y') - \frac{\delta.\varphi_{,}(x, y, y')}{\delta x} = 0, \quad (a')$$

$$_{,}\varphi(x, y, y') = C, \ (b') \qquad \varphi_{2}(x, y, y') < 0, \qquad _{2}\varphi(x, y, y') < 0$$

$$\text{et } \varphi_{2}(x, y, y').\ _{2}\varphi(x, y, y') > \overline{_{,}\varphi_{,}(x, y, y')}^{2}.$$

Les conditions (a) et (b) ou (a') et (b') peuvent être ramenées à une forme plus simple qui facilite toujours beaucoup les recherches relatives aux maxima et minima. A la rigueur il faudrait chercher la fonction qui satisfait l'équation (a) et voir si, substituée dans (b), on trouve $P = C$. Mais si nous remarquons que P doit être constant par rapport à x et que par conséquent $\frac{\delta.P}{x} = 0$, la première condition (a) devient

$$N = 0,$$

et la seconde restant la même, on trouve que pour le maximum comme pour le minimum, il faut que la dérivée de $\varphi(x, y, y')$ par rapport à y soit nulle et que celle par rapport à y' soit constante.

Soit par exemple à chercher la fonction exprimant y en x qui rend un maximum ou un minimum l'expression suivante

$$z = xy + y^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2.$$

Pour ce cas

$$N = x + 2y,$$

et

$$P = 2\frac{\delta y}{\delta x}.$$

et, puisqu'il faut que $N = 0$, et $P = C$, on trouve

$$x + 2y = 0,$$

d'où

$$y = -\frac{x}{2},$$

par conséquent

$$P = 2 \times -\frac{1}{2} = -1.$$

Les deux conditions premières sont donc satisfaites ; reste à nous assurer si $y = -\frac{x}{2}$ donne lieu à un maximum ou à un minimum. Or

$$\frac{\delta . N}{\delta y} = +2 > 0, \qquad \frac{\delta . P}{\delta y'} = +2 > 0,$$

et

$$\frac{\delta . N}{\delta y'} = 0,$$

d'où

$$\frac{\delta . N}{\delta y} \cdot \frac{\delta . P}{\delta y'} > \left(\frac{\delta N}{\delta y'}\right)^2.$$

Toutes les conditions du minimum sont donc satisfaites ; il en résulte que

$$z = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4},$$

est une valeur minima, c'est-à-dire qu'aucune autre fonction de x, restant constamment soit $> -\frac{x}{2}$ soit $< -\frac{x}{2}$, ne peut donner une valeur plus petite à z ; en outre la fonction $-\frac{x}{2}$ est la seule qui donne toujours une valeur plus grande à z quand on y ajoute ou qu'on en retranche une constante quelconque. En effet, soit

$$y = -\frac{x}{2} \pm a,$$

d'où

$$y^2 = \frac{x^2}{4} \mp ax + a^2$$

et

$$z = -\frac{x^2}{2} \pm ax + \frac{x^2}{4} \mp ax + a^2 + \frac{1}{4},$$

d'où l'on tire, après réduction,

$$z = -\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} + a^2,$$

valeur qui sera toujours plus grande que $-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}$ aussi longtemps que a conservera une valeur quelconque. Aucune autre fonction ne jouit de cette propriété.

79. Considérons encore la fonction

$$z = \varphi(x, y, y', y''),$$

dans laquelle on a

$$y = f(x), \quad y' = \frac{\delta y}{\delta x} \quad \text{et} \quad y'' = \frac{\delta \frac{\delta y}{\delta x}}{\delta x},$$

et demandons-nous quelle forme doit prendre la fonction $f(x)$ pour rendre z un maximum ou un minimum pour toutes les valeurs de x. Cette forme doit être telle que toute autre fonction de x, constamment plus grande ou plus petite que $f(x)$, donne une valeur plus petite à z dans le cas du maximum et une valeur plus grande dans le cas du minimum. Il faut donc qu'en donnant à la valeur de y qui rend z un maximum, une forme qui lui donne une valeur plus grande ou plus petite, la valeur correspondante de z soit plus petite que ce maximum.

Représentons par δy l'accroissement que reçoit y en changeant de forme ; il faut d'abord déterminer quel accroissement ou quel décroissement reçoivent y' et y'' quand y croît ou décroît de δy. Or, puisque

$$y' = \frac{\delta y}{\delta x}$$

nous avons

$$y'_{y \pm \delta y} = \frac{\delta.(y \pm \delta y)}{\delta x} = \frac{\delta y}{\delta x} \pm \frac{\delta.\delta y}{\delta x} = y' \pm h.$$

Nous représentons momentanément par h l'accroissement que reçoit y' ; de même

$$y''_{y \pm \delta y} = \frac{\delta \cdot \frac{\delta \cdot (y \pm \delta y)}{\delta x}}{\delta x} = \frac{\delta \cdot \frac{\delta y}{\delta x}}{\delta x} \pm \frac{\delta \cdot \frac{\delta \cdot \delta y}{\delta x}}{\delta x} = y'' \pm k,$$

en désignant par k l'accroissement de y''; la condition première du maximum sera donc

$$\varphi(x, y \pm \delta y, y' \pm h, y'' \pm k) < \varphi(x, y, y', y''),$$

ou

$$\varphi(x, y \pm \delta y, y' \pm h, y'' \pm k) - \varphi(x, y, y', y'') < 0.$$

mais d'après le § 33 on a

$$\varphi(x, y \pm \delta y, y' \pm h, y'' \pm k) =$$

$$\varphi(x, y, y', y'') \pm \varphi_{,}(x, y, y', y'')\,\delta y + \varphi_{2}(x, y, y', y'')\,\frac{\overline{\delta y}^2}{2} \pm \ldots$$

$$\pm\, {}_{,}\varphi(x, y, y', y'')\,h + {}_{,}\varphi_{,}(x, y, y', y'')\,h.\,\delta y \pm \ldots$$

$$\pm\, {}^{2}\varphi(x, y, y', y'')\,k + {}'\varphi_{,}(x, y, y', y'')\,k\,\delta y \pm \ldots$$

$$+\, {}_{2}\varphi(x, y, y', y'')\,\frac{h^2}{2} \pm \ldots$$

$$+\, {}_{,}'\varphi(x, y, y', y'')\,h.\,k \pm \ldots$$

$$+\, {}^{2}\varphi(x, y, y', y'')\,\frac{k^2}{2} \pm \ldots$$

série dans laquelle $\varphi_{,}(x, y, y', y'')$, $\varphi_{2}(x, y, y', y'')$... marquent les dérivées de z par rapport à y, ${}_{,}\varphi(x, y, y', y'')$, ${}_{2}\varphi(x, y, y', y'')$, ... celle par rapport à y' et ${}'\varphi(x, y, y', y'')$, ${}^{2}\varphi(x, y, y', y'')$ ... les dérivées par rapport à y''.

Si nous substituons cette valeur dans la condition du maximum, il vient

$$\left.\begin{aligned}
&\pm \varphi_{,}(x, y, y', y'')\,\delta y + \varphi_{2}(x, y, y', y'')\,\frac{\delta y^2}{2} \pm \ldots \\
&\pm {}_{,}\varphi\,(x, y, y', y'')\,h + {}_{,}\varphi_{,}(x, y, y', y'')\,h\,\delta y \pm \ldots \\
&\pm {}'\varphi\,(x, y, y', y'')\,k + {}'\varphi_{,}(x, y, y', y'')\,k\,\delta y \pm \ldots \\
&\qquad + {}_{2}\varphi\,(x, y, y', y'')\,\frac{h^2}{2} \pm \ldots \\
&\qquad + {}_{,}'\varphi\,(x, y, y', y'')\,hk \pm \ldots \\
&\qquad + {}^{2}\varphi\,(x, y, y', y'')\,\frac{k^2}{2} \pm \ldots \\
&\qquad\qquad \pm \ldots
\end{aligned}\right\} < 0. \quad (a)$$

Cette série doit être négative pour toutes les valeurs de δy; elle devra donc l'être encore quand δy et ses dérivées h et k seront assez petits pour rendre l'ensemble des trois premiers termes à lui seul plus grand que l'ensemble des autres termes de la série. Il faut par conséquent que l'on ait pour le maximum, en posant pour abréger,

$$\varphi_{,}(x, y, y', y'') = \mathrm{N}, \quad {}_{,}\varphi\,(x, y, y', y'') = \mathrm{P}, \quad {}'\varphi\,(x, y, y', y'') = \mathrm{Q};$$

$$\pm\,[\mathrm{N}\delta y + \mathrm{P}h + \mathrm{Q}k] < 0.$$

Mais quel que soit le signe de l'expression entre crochet, cette inégalité ne peut être satisfaite; pour qu'il y ait possibilité d'établir un maximum dans le cas qui nous occupe, il faut donc que l'on ait

$$\mathrm{N}\delta y + \mathrm{P}h + \mathrm{Q}k = 0 \quad [\mathrm{A}]$$

Cette première équation transforme la condition (a) en la suivante :

$$\left.\begin{array}{r}
\varphi_{2}\,(x, y, y', y'')\,\dfrac{\overline{\delta y}^{2}}{2} \pm \ldots\ldots \\
+\,{}_{,}\varphi_{,}\,(r, y, y', y'')\,h\,\delta y \pm \ldots\ldots \\
+\,{}'\varphi_{,}\,(x, y, y', y'')\,k\,\delta y \pm \ldots\ldots \\
+\,{}_{2}\varphi\,(x, y, y', y'')\,\dfrac{h^{2}}{2} \pm \ldots\ldots \\
+\,{}_{,}'\varphi\,(x, y, y', y'')\,hk \pm \ldots\ldots \\
+\,{}^{2}\varphi\,(x, y, y', y'')\,\dfrac{k^{2}}{2} \pm \ldots\ldots \\
\pm \ldots\ldots
\end{array}\right\} < 0. \quad (b)$$

Cette inégalité devant être également satisfaite pour toutes les valeurs de δy, on en déduit, en faisant la même hypothèse que plus haut

$$[B] \quad \frac{\delta N}{\delta y}\cdot\frac{\overline{\delta y}^{2}}{2} + \frac{\delta N}{\delta y'}\cdot h\,\delta y + \frac{\delta N}{\delta y''}\cdot k\,\delta y$$

$$+ \frac{\delta P}{\delta y'}\cdot\frac{h^{2}}{2} + \frac{\delta P}{\delta y''}\cdot hk + \frac{\delta Q}{\delta y''}\cdot\frac{k^{2}}{2} < 0.$$

Telles sont les conditions auxquelles doit satisfaire la fonction $f(x)$, pour rendre $\varphi\,(x, y, y', y'')$ un maximum. Mais dans la condition [A] la quantité δy est engagée sous le signe de la variation ; nous devons donc tâcher de l'en faire sortir, afin d'en déduire les égalités fondamentales qui donnent la forme cherchée pour la fonction $f(x)$. Puisque P et δy sont des fonctions de x, nous aurons, en vertu de la règle du paragraphe 53,

$$\int P\,\frac{\delta.\,\delta y}{\delta x}\,\delta x = P\delta y - \int \delta y \cdot \frac{\delta P}{\delta x}\,\delta x,$$

d'où, en variant,

$$P\,\frac{\delta.\,\delta y}{\delta x} = \frac{\delta.\,P\delta y}{\delta x} - \delta y.\,\frac{\delta P}{\delta x}.$$

De même

$$\int Q \frac{\delta . \frac{\delta y}{\delta x}}{\delta x} \delta x = Q \frac{\delta . \delta y}{\delta x} - \int \frac{\delta . \delta y}{\delta x} . \frac{\delta Q}{\delta x} \delta x,$$

d'où l'on tire, par la variation,

$$Q \frac{\delta . \frac{\delta y}{\delta x}}{\delta x} = \frac{\delta . Q \frac{\delta . \delta y}{\delta x}}{\delta x} - \frac{\delta . \delta y}{\delta x} . \frac{\delta Q}{\delta x} .$$

Mais

$$Q \frac{\delta . \delta y}{\delta x} = \frac{\delta . Q \delta y}{\delta x} - \delta y . \frac{\delta Q}{\delta x},$$

et

$$\frac{\delta Q}{\delta x} . \frac{\delta . \delta y}{\delta x} = \frac{\delta . \frac{\delta Q}{\delta x} \delta y}{\delta x} - \delta y . \frac{\delta . \frac{\delta Q}{\delta x}}{\delta x};$$

par conséquent

$$Q \frac{\delta . \frac{\delta . \delta y}{\delta x}}{\delta x} = \frac{\delta . \frac{\delta . Q \delta y}{\delta x}}{\delta x} - 2 \frac{\delta . \frac{\delta Q}{\delta x} \delta y}{\delta x} + \frac{\delta . \frac{\delta Q}{\delta x}}{\delta x} \delta y,$$

d'où l'on déduit pour [A], par substitution

$$\left. \begin{array}{l} \left[N - \frac{\delta P}{\delta x} + \frac{\delta . \frac{\delta Q}{\delta x}}{\delta x} \right] \delta y . \\ + \frac{\delta .}{\delta x} \left[P \delta y - 2 \frac{\delta Q}{\delta x} \delta y + \frac{\delta . Q \delta y}{\delta y} \right] \end{array} \right\} = 0.$$

Pour que cette expression soit nulle pour toutes les valeurs de δy, il faut que

$$N - \frac{\delta P}{\delta x} + \frac{\delta . \frac{\delta Q}{\delta x}}{\delta x} = 0. \quad [1]$$

et il faut et il suffit que

$$P\delta y - 2\,\frac{\delta Q}{\delta x}\,\delta y + \frac{\delta Q\,\delta y}{\delta x} = C. \quad (c)$$

Pour que cette dernière équation soit toujours satisfaite, on doit avoir

$$P\delta y - 2\,\frac{\delta Q}{\delta x}\,\delta y = C,$$

car on obtient cette équation quand $\delta y = \frac{C}{Q}$. On en déduit, puisque δy est indépendant de x,

$$P - 2\,\frac{\delta Q}{\delta x} = C, \quad [2]$$

ce qui donne pour (c)

$$\frac{\delta . Q\delta y}{\delta x} = C',$$

d'où

$$Q\delta y = C'x + C''$$

et δy étant constant, on aura simplement

$$Q = C'x + C''. \quad [3]$$

En comparant les équations [1], [2] et [3], on en déduit

$$N = 0, \qquad P = C \quad \text{et} \quad Q = C'x + C''.$$

La fonction $f(x)$ qui rend $\varphi\,(x, y, y', y'')$ un maximum, doit donc d'abord satisfaire ces trois équations. Reste à déduire les conditions qui résultent de l'inégalité [B].

Cette inégalité devant être satisfaite pour toutes les valeurs de δy, on devra avoir

$$\frac{\delta N}{\delta y} < 0, \quad \frac{\delta P}{\delta y'} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\delta Q}{\delta y''} < 0.$$

Digitized by Google

Car δy peut successivement prendre des formes telles que pour certaines valeurs de x on ait successivement

$$\delta y > h \quad \text{et} \quad \delta y > k$$

$$h > \delta y \quad \text{et} \quad h > k$$

$$k > \delta y \quad \text{et} \quad k > h$$

et ces différences peuvent être assez grandes pour faire dépendre le signe de l'expression, tantôt du terme en δy^2, tantôt de celui en h^2 et enfin de celui en k^2; ce qui nous conduit aux trois conditions que nous venons de donner. Mais cela ne suffit pas encore, car il faut que l'ensemble des autres termes de la série ne puisse dans aucun cas faire changer le signe de l'expression.

Or, on peut avoir $k = 0$ ce qui donne

$$\frac{\delta N}{\delta y} \cdot \frac{\overline{\delta y}^2}{2} + \frac{\delta N}{\delta y'} h \delta y + \frac{\delta P}{\delta y'} \frac{h^2}{2} \cdot < 0$$

Pour que cette expression reste toujours négative, il faut que l'on ait

$$\frac{\delta N}{\delta y} \cdot \frac{\delta P}{\delta y'} > \left[\frac{\delta N}{\delta y'}\right]^2 .$$

Ceci résulte de la transformation du paragraphe précédent.

De même il se peut que $h = 0$, d'où

$$\frac{\delta N}{\delta y} \cdot \frac{\overline{\delta y}^2}{2} + \frac{\delta N}{\delta y''} \cdot k \delta y + \frac{\delta Q}{\delta y''} \cdot \frac{k^2}{2} < 0,$$

d'où l'on tire, comme condition nécessaire,

$$\frac{\delta N}{\delta y} \cdot \frac{\delta Q}{\delta y''} > \left[\frac{\delta N}{\delta y''}\right]^2 .$$

Enfin il se peut que pour certaines valeurs de x on ait $\delta y = 0$,

tandis que h et k ne s'annulent pas, ce qui exige que l'on ait aussi

$$\frac{\partial P}{\partial y'} \cdot \frac{\partial Q}{\partial y''} > \left[\frac{\partial P}{\partial y''}\right]^2.$$

Finalement, pour que [B] ne puisse pas changer de signe il faut que

$$\frac{\partial N}{\partial y} \frac{\overline{\partial y}^2}{2} + \frac{\partial P}{\partial y'} \frac{h^2}{2} + \frac{\partial Q}{\partial y''} \cdot \frac{k^2}{2} >$$

$$\frac{\partial N}{\partial y'} h\partial y + \frac{\partial N}{\partial y''} \cdot k\partial y + \frac{\partial P}{\partial y''} kh.$$

En d'autres termes, il faut que l'équation

$$\frac{\partial N}{\partial y} \frac{\overline{\partial y}^2}{2} - \frac{\partial N}{\partial y'} h\partial y - \frac{\partial N}{\partial y''} k\partial y$$

$$+ \frac{\partial P}{\partial y'} \cdot \frac{h^2}{2} - \frac{\partial P}{\partial y''} \cdot hk + \frac{\partial Q}{\partial y''} k^2 = 0$$

ne puisse jamais être satisfaite; il faut donc que toutes les valeurs que l'on pourrait en tirer pour ∂y, h et k soient imaginaires. Si nous résolvons par rapport à ∂y, nous trouvons

$$\partial y = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial y'} h + \dfrac{\partial N}{\partial y''} k}{\dfrac{\partial N}{\partial y}} \\ \pm \dfrac{1}{\dfrac{\partial N}{\partial y}} \sqrt{\left[\dfrac{\partial N}{\partial y'} h + \dfrac{\partial N}{\partial y''} k\right]^2 - \dfrac{\partial P}{\partial y'} \cdot \dfrac{\partial N}{\partial y} h^2 + 2 \dfrac{\partial P}{\partial y''} \cdot \dfrac{\partial N}{\partial y} hk - \dfrac{\partial Q}{\partial y''} \cdot \dfrac{\partial N}{\partial y} \cdot k^2} \end{array} \right.$$

Or, pour que ces racines soient toujours imaginaires, il faut que l'on ait

$$\left[\frac{\partial N}{\partial y'} h + \frac{\partial N}{\partial y''} k\right]^2 - \frac{\partial P}{\partial y'} \cdot \frac{\partial N}{\partial y} h^2 + 2 \frac{\partial P}{\partial y''} \cdot \frac{\partial N}{\partial y} hk - \frac{\partial Q}{\partial y''} \cdot \frac{\partial N}{\partial y} k^2 < 0,$$

ou, en développant le carré et ordonnant par rapport à $\frac{h}{k}$,

$$\left[\left(\frac{\partial N}{\partial y'}\right)^2 - \frac{\partial P}{\partial y'}\cdot\frac{\partial N}{\partial y}\right]\left(\frac{h}{k}\right)^2 + 2\left[\frac{\partial N}{\partial y'}\cdot\frac{\partial N}{\partial y''} + \frac{\partial P}{\partial y''}\cdot\frac{\partial N}{\partial y}\right]\frac{h}{k}$$
$$+\left[\left(\frac{\partial N}{\partial y''}\right)^2 - \frac{\partial Q}{\partial y''}\cdot\frac{\partial N}{\partial y}\right] < 0.$$

Pour que cette expression soit toujours négative, il faut qu'en la posant égale à zéro et en résolvant l'équation ainsi obtenue, par rapport à $\frac{h}{k}$, les racines de l'équation soient imaginaires. En exécutant ces calculs on arrivera à la condition nécessaire

$$\left[\left(\frac{\partial N}{\partial y'}\right)^2 - \frac{\partial P}{\partial y'}\cdot\frac{\partial N}{\partial y}\right]\left[\left(\frac{\partial N}{\partial y''}\right)^2 - \frac{\partial Q}{\partial y''}\cdot\frac{\partial N}{\partial y}\right] >$$
$$\left[\frac{\partial N}{\partial y'}\cdot\frac{\partial N}{\partial y''} + \frac{\partial P}{\partial y''}\cdot\frac{\partial N}{\partial y}\right]^2.$$

En résolvant d'abord par rapport à h et passant par les mêmes transformations que plus haut, on arrive à la condition

$$\left[\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial N}{\partial y}\cdot\frac{\partial P}{\partial y'}\right]\left[\left(\frac{\partial P}{\partial y''}\right)^2 - \frac{\partial Q}{\partial y''}\cdot\frac{\partial P}{\partial y'}\right] >$$
$$\left[\frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial P}{\partial y''} + \frac{\partial N}{\partial y''}\cdot\frac{\partial P}{\partial y'}\right]^2.$$

Enfin en résolvant par rapport à k on serait arrivé à l'inégalité

$$\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial N}{\partial y}\cdot\frac{\partial Q}{\partial y''}\right]\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial y'}\right)^2 - \frac{\partial P}{\partial y'}\cdot\frac{\partial Q}{\partial y''}\right] >$$
$$\left[\frac{\partial Q}{\partial y}\cdot\frac{\partial Q}{\partial y'} + \frac{\partial N}{\partial y'}\cdot\frac{\partial Q}{\partial y''}\right]^2.$$

Digitized by Google

Voici, en résumé, les conditions à satisfaire dans le cas du maximum. Pour abréger nous indiquons par $\varphi_{,}$, φ_{2},... les dérivées de $\varphi\,(x, y, y', y'')$ par rapport à y; par ${}_{,}\varphi$, ${}_{2}\varphi$... celles par rapport à y'; et par ${}^{\prime}\varphi$, ${}^{2}\varphi$... les dérivées par rapport à y''. D'après ces notations on trouve

$$\varphi_{,} = 0, \quad {}_{,}\varphi = C, \quad {}^{2}\varphi = C'x + C'',$$

$$\varphi_{2} < 0, \quad {}_{2}\varphi < 0, \quad {}^{2}\varphi < 0,$$

$$\varphi_{2}\,.\,{}_{2}\varphi > [{}_{,}\varphi_{,}]^2, \quad \varphi_{2}\,.\,{}^{2}\varphi > [{}^{\prime}\varphi_{,}]^2, \quad {}_{2}\varphi\,.\,{}^{2}\varphi > [{}^{\prime}_{,}\varphi]^2,$$

$$[({}_{,}\varphi_{,})^2 - \varphi_{2}\,.\,{}_{2}\varphi]\;[({}^{\prime}\varphi_{,})^2 - {}^{2}\varphi\,.\,\varphi_{2}] > [{}_{,}\varphi_{,}\,.\,{}^{\prime}\varphi_{,} + {}^{\prime}_{,}\varphi\,.\,\varphi_{2}]^2,$$

$$[({}_{,}\varphi_{,})^2 - \varphi_{2}\,.\,{}_{2}\varphi]\;[({}^{\prime}_{,}\varphi)^2 - {}^{2}\varphi\,.\,{}_{2}\varphi] > [{}_{,}\varphi_{,}\,.\,{}^{\prime}_{,}\varphi + {}^{\prime}\varphi_{,}\,.\,{}_{2}\varphi]^2,$$

$$[({}^{\prime}\varphi_{,})^2 - \varphi_{2}\,.\,{}^{2}\varphi]\;[({}^{\prime}_{,}\varphi)^2 - {}_{2}\varphi\,.\,{}^{2}\varphi] > [{}^{\prime}\varphi_{,}\,.\,{}^{\prime}_{,}\varphi + {}_{,}\varphi_{,}\,.\,{}^{2}\varphi]^2.$$

Telles sont les douze conditions auxquelles doit satisfaire la fonction $f(x)$ pour rendre $\varphi\,(x, y, y', y'')$ un maximum. Comme on le voit, la solution de ce problème en général est excessivement compliquée; mais ces conditions se simplifient considérablement dans les applications, où il y a toujours un grand nombre de dérivées qui sont nulles. Car l'expression dans laquelle toutes ces conditions joueraient un rôle actif, devrait être d'une complication telle qu'on ne rencontre jamais dans les applications des fonctions qui en approchent, même de loin; de sorte qu'on ne doit nullement s'effrayer de cette complication apparente.

Si nous nous étions attaché à la recherche des conditions relatives au minimum, nous serions arrivé aux mêmes conditions, excepté que les inégalités

$$\varphi_{2} < 0, \qquad {}_{2}\varphi < 0 \quad \text{et} \quad {}^{2}\varphi < 0$$

se seraient changées dans les suivantes

$$\varphi_{2} > 0, \qquad {}_{2}\varphi > 0 \quad \text{et} \quad {}^{2}\varphi > 0;$$

les autres conditions sont identiques.

La complication des calculs nous empêche d'étendre ces considérations à des expressions dans lesquelles entreraient un plus grand nombre de dérivées. Ces considérations n'offrent d'ailleurs aucune difficulté. C'est toujours le même procédé, avec cette différence que les transformations sont plus compliquées. La discussion de ces cas n'offrirait d'ailleurs aucune utilité, puisque dans les applications du calcul des variations on fait rarement usage d'une dérivée au delà de la dérivée seconde.

80. Soit enfin l'équation

$$v = \varphi\,(x,\, y,\, y',\, z,\, z')$$

dans laquelle $y = f(x)$, $y' = \frac{\delta y}{\delta x}$, $z = \mathrm{F}\,(x)$ et $z' = \frac{\delta z}{\delta x}$; et proposons-nous de déterminer la forme des fonctions $f(x)$ et $\mathrm{F}\,(x)$ qui rendent v un maximum ou un minimum. Nous représentons comme toujours par δy l'accroissement que reçoit y, en changeant de forme et par δz, celui que reçoit z quand la forme de $\mathrm{F}\,(x)$ varie. Les accroissements correspondants de y' et de z' seront respectivement $\frac{\delta.\,\delta y}{\delta x}$ et $\frac{\delta.\,\delta z}{\delta x}$. Pour abréger nous posons comme précédemment

$$\frac{\delta.\,\delta y}{\delta x} = h$$

et par analogie

$$\frac{\delta.\,\delta z}{\delta x} = k.$$

La condition du maximum devient donc

$$\varphi\,(x,\, y \pm \delta y,\, y' \pm h,\, z \pm \delta z,\, z' \pm k) < \varphi\,(x,\, y,\, y',\, z,\, z')$$

ou

$$\varphi\,(x,\, y \pm \delta y,\, y' \pm h,\, z \pm \delta z,\, z' \pm k) - \varphi\,(x,\, y,\, y',\, z,\, z') < 0.$$

En mettant au lieu de la fonction variée sa valeur développée en série, il vient

$$\left.\begin{array}{r}
\pm \varphi'(x, y, y', z, z')\,\delta y + \varphi^{2}(x, y, y', z, z')\,\dfrac{\overline{\delta y}^{2}}{2} \pm \ldots \\
\pm \varphi_{,}(x, y, y', z, z')\,h + \varphi_{,}'(x, y, y', z, z')\,h\,\delta y \pm \ldots \\
\pm {}_{,}\varphi(x, y, y', z, z')\,\delta z \pm {}_{,}\varphi'(x, y, y', z, z')\,\delta y.\delta z \pm \ldots \\
\pm {}'\varphi(x, y, y', z, z')\,k \pm {}'\varphi'(x, y, y', z, z')\,\delta y.k \pm \ldots \\
+ \varphi_{2}(x, y, y', z, z')\,\dfrac{h^{2}}{2} \pm \ldots \\
\pm {}_{,}\varphi_{,}(x, y, y', z, z')\,h\,\delta z \pm \ldots \\
\pm {}'\varphi_{,}(x, y, y', z, z')\,hk \pm \ldots \\
+ {}_{2}\varphi(x, y, y', z, z')\,\dfrac{\overline{\delta z}^{2}}{2} \pm \ldots \\
+ {}_{,}'\varphi(x, y, y', z, z')\,k\,\delta z \pm \ldots \\
+ {}^{2}\varphi(x, y, y', z, z')\,\dfrac{k^{2}}{2} \pm \ldots \\
\pm \ldots
\end{array}\right\} < 0.$$

φ', φ^{2}... représentent les dérivées de $\varphi\,(x, y, y', z, z')$ par rapport à y; $\varphi_{,}$, φ_{2}... celles par rapport à y'; ${}_{,}\varphi$, ${}_{2}\varphi$... celles par rapport à z et enfin ${}'\varphi$, ${}^{2}\varphi$... les dérivées par rapport à z'. De cette condition fondamentale on déduit par des raisonnements bien connus, les deux suivantes

$$\varphi'.\,\delta y + \varphi_{,}.\,h + {}_{,}\varphi.\,\delta z + {}'\varphi.\,k = 0. \quad [A]$$

$$\left.\begin{array}{l}
\varphi^{2}.\dfrac{\overline{\delta y}^{2}}{2} + \varphi_{,}'.\,h\,\delta y \pm {}_{,}\varphi'.\,\delta y.\,\delta z \pm {}'\varphi'\,\delta y.k + \varphi_{2}.\dfrac{h^{2}}{2} \\
\pm {}_{,}\varphi_{,}.\,h\,\delta z \pm {}'\varphi_{,}.\,hk + {}_{2}\varphi.\dfrac{\overline{\delta z}^{2}}{2} + {}_{,}'\varphi.\,\delta z.k + {}^{2}\varphi.\dfrac{k^{2}}{2}
\end{array}\right\} < 0. \quad [B]$$

Nous devons faire pour cette question la même distinction que pour celle du paragraphe 77 ; c'est-à-dire, que nous devons distinguer le cas où δy et δz sont dépendants de celui où ces accroissements sont indépendants. Nous ne discuterons que le second cas, car la discussion du premier exige la connaissance préalable de la relation qui lie y à z. Non qu'il soit impossible de résoudre cette question en général, en supposant $z = \Psi(y)$, mais cette solution ne présentant rien de difficile ni d'intéressant, nous croyons pouvoir nous dispenser de la donner. Quant au second cas, la discussion en présente un intérêt assez vif.

Considérons d'abord tout ce qui est relatif à l'équation [A]. Il est évident que les quantités δy et δz étant indépendantes, cette équation se divise dans les deux suivantes

$$\varphi'(x, y, y', z, z')\, \delta y + \varphi_{,}(x, y, y', z, z')\, k = 0$$

$$_{,}\varphi(x, y, y', z, z')\, \delta z + {}'\varphi(x, y, y', z, z')\, k = 0.$$

Ces équations rentrant sous le même type que celle que nous avons discutée au § 78, nous en déduisons les conditions suivantes

$$\varphi'(x, y, y', z, z') = 0, \qquad {}_{,}\varphi(x, y, y', z, z') = 0$$

$$\varphi_{,}(x, y', y, z, z') = C, \qquad {}'\varphi(x, y, y', z, z') = C',$$

auxquelles doivent satisfaire les fonctions $f(x)$, $F(x)$, pour qu'elles rendent $\varphi(x, y, y', z, z')$ un maximum. En outre de l'inégalité [B] on déduit successivement les conditions suivantes

$$\varphi^{2}(x, y, y', z, z') < 0, \qquad \varphi_{2}(x, y, y', z, z') < 0.$$

$$_{2}\varphi(x, y, y', z, z') < 0, \qquad {}^{2}\varphi(x, y, y', z, z') < 0.$$

Mais l'inégalité [B] doit toujours être satisfaite ; elle devra donc l'être encore quand on aura soit 1° $\delta z = 0$ et $k = 0$;

2° $h = 0$ et $k = 0$; 3° $\delta y = 0$ et $h = 0$; 4° $\delta y = 0$ et $k = 0$; 5° $\delta z = 0$ et $h = 0$; soit enfin 6° $\delta y = 0$ et $\delta z = 0$. Ces six cas nous conduisent aux six conditions

$$\varphi^2 . \varphi_2 > [\varphi_{,}]^2, \qquad \varphi^2 . {}_2\varphi > [{}_{,}\varphi']^2, \qquad {}_2\varphi . {}^2\varphi > [{}_{,}{}'\varphi]^2,$$

$$ {}_2\varphi . \varphi_2 > [{}_{,}\varphi_{,}]^2, \qquad \varphi^2 . {}^2\varphi > [{}'\varphi']^2, \qquad {}^2\varphi . \varphi_2 > [{}'\varphi_{,}]^2.$$

Il faut aussi que [B] soit toujours satisfait, quand on aura 1° $k = 0$; 2° $h = 0$; 3° $\delta z = 0$; 4° $\delta y = 0$.

Ces cas conduisent respectivement aux conditions

$$1^\circ \; [({}_{,}\varphi')^2 - \varphi^2 . {}_2\varphi] \; [({}_{,}\varphi_{,})^2 - \varphi_2 . {}_2\varphi] > [{}_{,}\varphi' . {}_{,}\varphi_{,} + \varphi_{,}' . {}_2\varphi]^2$$

$$[(\varphi_{,}')^2 - \varphi^2 . \varphi_2] \; [({}_{,}\varphi_{,})^2 - {}_2\varphi . \varphi_2] > [\varphi_{,}' . {}_{,}\varphi_{,} + {}_{,}\varphi' . \varphi_2]^2$$

$$[(\varphi_{,}')^2 - \varphi_2 . \varphi^2] \; [({}_{,}\varphi')^2 - {}_2\varphi . \varphi^2] > [\varphi_{,}' . {}_{,}\varphi' + {}_{,}\varphi_{,} . \varphi^2]^2$$

$$2^\circ \; [({}_{,}\varphi')^2 - {}_2\varphi . \varphi^2] \; [({}'\varphi')^2 - {}^2\varphi . \varphi^2] > [{}_{,}\varphi' . {}'\varphi' + {}_{,}{}'\varphi . \varphi^2]^2$$

$$[({}_{,}{}'\varphi)^2 - {}_2\varphi . {}^2\varphi] \; [({}'\varphi')^2 - \varphi^2 . {}^2\varphi] > [{}_{,}{}'\varphi . {}'\varphi' + {}_{,}\varphi' . {}^2\varphi]^2$$

$$[({}_{,}{}'\varphi)^2 - {}^2\varphi . {}_2\varphi] \; [({}_{,}\varphi')^2 - \varphi^2 . {}_2\varphi] > [{}_{,}{}'\varphi . {}_{,}\varphi' + {}'\varphi' . {}_2\varphi]^2$$

$$3^\circ \; [(\varphi_{,}')^2 - \varphi_2 . \varphi^2] \; [({}'\varphi')^2 - {}^2\varphi . \varphi^2] > [\varphi_{,}' . {}'\varphi' + {}'\varphi_{,} . \varphi^2]^2$$

. . . .

. . . .

les deux autres conditions se déduisent aisément de celle-ci

$$4^\circ \; [({}_{,}\varphi_{,})^2 - {}_2\varphi . \varphi_2] \; [({}'\varphi_{,})^2 - {}^2\varphi . \varphi_2] > [{}_{,}\varphi_{,} . {}'\varphi_{,} + {}_{,}{}'\varphi . \varphi_2]^2$$

. . . .

. . . .

plus deux autres conditions semblables. Finalement, pour que [B] soit toujours satisfait, il faut que cette expression ne puisse jamais être égale à zéro ; il faut donc aussi que l'équation qui égale cette fonction à zéro ait toujours des racines imagi-

naires quand on la résoud par rapport à l'une quelconque des quantités δy, δz, h ou k. Au moyen des transformations adoptées dans les questions précédentes, on arrive à la condition que voici

$$\left\{[\varphi_{,}' \cdot {}_{,}\varphi' + {}_{,}\varphi_{,} \cdot \varphi^{2}]^2 - [(\varphi_{,}')^2 - \varphi_{2} \cdot \varphi^{2}]\,[({}_{,}\varphi')^2 - {}_{2}\varphi \cdot \varphi^{2}]\right\} \times$$

$$\left\{[\varphi_{,}' \cdot {}'\varphi' + {}'\varphi_{,} \cdot \varphi^{2}]^2 - [(\varphi_{,}')^2 - \varphi_{2} \cdot \varphi^{2}]\,[({}'\varphi')^2 - {}^{2}\varphi \cdot \varphi^{2}]\right\} >$$

$$> \left\{\begin{array}{l} [\varphi_{,}' \cdot {}_{,}\varphi' + {}_{,}\varphi_{,} \cdot \varphi^{2}]\,[\varphi_{,}' \cdot {}'\varphi' + {}'\varphi_{,}\, \varphi^{2}] \\ - [{}_{,}\varphi' \cdot {}'\varphi' + {}_{,}'\varphi \cdot \varphi^{2}]\,[(\varphi_{,}')^2 - \varphi_{2} \cdot \varphi^{2}] \end{array}\right\}^2$$

Cette condition est, comme on le voit, très-compliquée; cependant il en existe encore onze autres identiques à celle-ci; elles s'en déduisent facilement par la permutation des accents. Changeons, par exemple, les accents relatifs aux y en ceux relatifs aux y' et réciproquement, il vient dans ce cas

$$\left\{[\varphi_{,}' \cdot {}_{,}\varphi_{,} + {}_{,}\varphi' \cdot \varphi_{2}]^2 - [(\varphi_{,}')^2 - \varphi^{2} \cdot \varphi_{2}]\,[({}_{,}\varphi_{,})^2 - {}_{2}\varphi \cdot \varphi_{2}]\right\} \times$$

$$\left\{[\varphi_{,}' \cdot {}'\varphi_{,} + {}'\varphi' \cdot \varphi_{2}]^2 - [(\varphi_{,}')^2 - \varphi^{2} \cdot \varphi_{2}]\,[({}'\varphi_{,})^2 - {}^{2}\varphi \cdot \varphi_{2}]\right\} >$$

$$\left\{\begin{array}{l} [\varphi_{,}' \cdot {}_{,}\varphi_{,} + {}_{,}\varphi' \cdot \varphi_{2}]\,[\varphi_{,}' \cdot {}'\varphi_{,} + {}'\varphi' \cdot \varphi_{2}] \\ - [{}_{,}\varphi_{,} \cdot {}'\varphi_{,} + {}_{,}'\varphi \cdot \varphi_{2}]\,[(\varphi_{,}')^2 - \varphi^{2} \cdot \varphi_{2}] \end{array}\right\}^2$$

Par le même procédé on en déduirait encore dix autres conditions, que nous ne transcrirons pas ici, à cause de leur complication. Dans tous les cas elles ne rendraient pas la question plus claire.

En résumé donc, les fonctions $f(x)$ et $F(x)$, qui rendent $\varphi(x, y, y', z, z')$ un maximum, doivent satisfaire à *trente-huit* conditions. La solution d'un pareil problème serait donc d'une difficulté désespérante, si heureusement dans les fonctions que l'on considère, la plupart de ces dérivées n'étaient nulles. Pour que toutes ces conditions jouassent un rôle actif dans la question, il faudrait que la fonction primitive fût d'une com-

plication telle qu'on n'en rencontre jamais dans les applications.

Ces considérations pourraient aisément s'étendre à des cas plus compliqués encore; mais la longueur des transformations rebutera toujours les mathématiciens aussi longtemps que la recherche de ces conditions ne leur deviendra pas nécessaire.

Si nous avions raisonné sur le minimum, nous serions arrivé à un même nombre de conditions. Ces conditions sont identiques à celles que nous venons de trouver, à l'exception de celles qui sont relatives aux dérivées secondes simples; elles sont pour le minimum

$$\varphi^2(x, y, y', z, z') > 0, \qquad \varphi_2(x, y, y', z, z') > 0$$

$$_2\varphi(x, y, y', z, z') > 0, \qquad {}^2\varphi(x, y, y', z, z') > 0.$$

Sans nous étendre sur les applications que l'on pourrait faire de ces formules, nous passerons immédiatement à l'application des considérations de maximis et minimis aux analepses. C'est ce qui fera le sujet de la quatrième et dernière partie de cet ouvrage.



THÉORIE

DES MAXIMA ET DES MINIMA

APPLIQUÉE AUX ANALEPSES.

81. Le sujet que nous allons traiter dans ce chapitre faisait l'objet spécial des applications du ci-devant calcul des variations. Comme nous l'avons déjà dit, ce calcul n'avait aucun principe. Toutes les règles y étaient arbitraires, ou du moins ne se basaient que sur des raisons purement intuitives. Le calcul des variations tel que nous venons de l'exposer, n'eût-il eu pour résultat que de régulariser cette partie de la science, mériterait déjà, me semble-t-il, de fixer l'attention des hommes de la science. Le calcul des variations, tel qu'il existait, se base également sur les principes des infiniment petits : c'est dire assez clairement qu'on est tombé sur l'esprit de ce calcul dans les mêmes erreurs que sur celui du calcul différentiel. C'est ainsi que l'on considère aussi δx comme une quantité infiniment petite; mais pour la distinguer du dx on dit, toujours sans alléguer aucune raison, que le δx marque que l'on passe d'une courbe à une autre courbe infiniment voisine, tandis que le dx marque que l'on reste sur la même courbe. Je n'ai jamais pu connaître les raisons qui ont conduit les mathématiciens à ces conclusions; mais pour rester fidèle à la marche que j'ai suivie jusqu'ici, je m'abstiendrai de toute dis-

sertation à cet égard; je préfère, d'ailleurs, de beaucoup exposer la théorie que je défends, que de critiquer celle qu'on a suivie jusqu'à ce jour. Je dis à cet égard tout juste ce qui est nécessaire à la clarté du sujet que je traite.

Pour procéder comme nous l'avons fait jusqu'ici, nous irons du simple au composé. Considérons d'abord l'analepse suivante

$$k = \int \varphi(x)\, \delta x,$$

et demandons-nous quelle valeur doit prendre la variable x pour rendre k un maximum ou un minimum. Puisque k est une fonction de x, la valeur de cette variable qui rendra k un maximum doit d'abord annuler la dérivée première de cette fonction.

Or,

$$\frac{\delta k}{\delta x} = \frac{\delta . \int \varphi(x)\, \delta x}{\delta x} = \varphi(x)$$

la valeur de x qui rend k un maximum doit donc satisfaire l'équation

$$\varphi(x) = 0.$$

En second lieu, la dérivée seconde de k doit être négative; on devra donc avoir

$$\varphi'(x) < 0.$$

Telles sont les deux conditions à satisfaire dans le cas du maximum. En raisonnant de même pour le minimum, on trouve les conditions

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(x) > 0.$$

Comme on le voit, cette première question ne présente aucune difficulté; nous passerons immédiatement à la discussion d'une autre plus compliquée.

Digitized by Google

82. On pourrait avoir

$$k = \int_a^b \varphi(x)\, \delta x$$

et se demander quelle valeur doivent prendre les limites a et b pour rendre k un maximum ou un minimum. Représentons par $\Psi(x)$ l'analepse générale de $\varphi(x)\,\delta x$, nous aurons

$$k = \Psi(b) - \Psi(a).$$

Pour avoir la valeur maxima ou minima de k, il faut regarder b et a comme des variables indépendantes et se demander quelle valeur elles doivent prendre pour rendre k un maximum.

Il faut en premier lieu, d'après la règle du § 40, que

$$\frac{\delta k}{\delta b} = \frac{\delta.\Psi(b)}{\delta b} = 0.$$

Mais

$$\frac{\delta.\Psi(x)}{\delta x} = \frac{\delta.\int \varphi(x)\,\delta x}{\delta x} = \varphi(x).$$

Par conséquent il faut que l'on ait pour le maximum comme pour le minimum

$$\varphi(b) = 0.$$

On trouverait de même pour a

$$-\varphi(a) = 0.$$

Voilà pour les conditions premières. Si nous interprétons les conditions secondes du § 40, de manière à ce qu'elles s'appliquent à la question que nous voulons résoudre, nous trouvons pour le maximum

$$\varphi'(b) < 0, \qquad -\varphi'(a) < 0 \quad \text{et} \quad -\varphi'(b).\,\varphi'(a) > 0,$$

et pour le minimum

$$\varphi'(b) > 0, \qquad -\varphi'(a) > 0 \quad \text{et} \quad -\varphi'(b).\varphi'(a) > 0.$$

Remarquons d'abord que la cinquième condition sera toujours satisfaite quand la troisième et la quatrième le seront. Il est donc inutile de considérer cette cinquième condition. Si nous remarquons en outre que $-\varphi'(a) < 0$ est la même chose que $\varphi'(a) > 0$ et $-\varphi'(a) > 0$ la même chose que $\varphi'(a) < 0$, les conditions du maximum deviennent

$$\varphi(b) = 0, \qquad \varphi'(b) < 0, \qquad \varphi(a) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(a) > 0,$$

et celles du minimum

$$\varphi(b) = 0, \qquad \varphi'(b) > 0, \qquad \varphi(a) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(a) < 0.$$

En examinant bien ces conditions, nous voyons que pour avoir la valeur maxima de k, il faut faire b égal à la valeur de x qui rend $\int \varphi(x)\,\delta x$ un maximum, et prendre pour a la valeur de x qui rend $\int \varphi(x)\,\delta x$ un minimum. L'inverse a lieu pour le minimum, de sorte que chaque fois qu'il y aura une valeur maxima pour k, cette quantité aura aussi une valeur minima, et réciproquement.

Mais dans tout ce qui précède nous avons considéré $\varphi(x)$ comme une fonction indépendante des limites a et b. Cependant il se peut que cette fonction renferme l'une de ces limites, elle peut même les renfermer toutes deux. Dans ce cas le moyen le plus court consiste à chercher l'analepse étendue entre les limites a et b et à traiter l'expression ainsi obtenue à la manière des fonctions ordinaires de x et de y. Nous résoudrons plus loin un problème dans lequel nous aurons à considérer le cas que nous venons de signaler. Cette application nous permettra d'expliquer clairement ce que nous ne pouvons qu'indiquer ici.

Digitized by Google

83. Dans les deux paragraphes précédents nous avons considéré la fonction engagée sous la signe d'analepsie, comme ne renfermant que la variable par rapport à laquelle on analepse. Il y a cependant des cas où l'on a

$$k = \int \varphi (x, y) \, \delta x$$

en même temps que

$$y = f(x).$$

On peut se demander quelle forme doit avoir la fonction $f(x)$ afin de rendre k un maximum ou un minimum pour toutes les valeurs de x. Il faut donc qu'en donnant à l'expression de y en x une forme qui rende y constamment plus grande ou plus petite pour toutes les valeurs de x, la valeur que l'on obtient pour k soit toujours plus petite que la valeur maxima. Cette condition sera donc exprimée par l'inégalité

$$\int \varphi (x, y \pm \delta y) \, \delta x - \int \varphi (x, y) \, \delta x < 0.$$

Mais

$$\int \varphi (x, y \pm \delta y) \, \delta x =$$

$$\int \left[\varphi (x, y) \pm \varphi_{,} (x, y) \, \delta y + \varphi_{2} (x, y) \frac{\overline{\delta y}^2}{2} \pm \ldots \right] \delta x =$$

$$\int \varphi (x, y) \, \delta x \pm \int \varphi_{,} (x, y) \, \delta y . \, \delta x + \int \varphi_{2} (x, y) \frac{\overline{\delta y}^2}{2} . \, \delta x \pm \ldots$$

$\varphi_{,} (x, y)$, $\varphi_{2} (x, y)$... représentant les dérivées de $\varphi (x, y)$ par rapport à y, il vient par conséquent, pour la condition fondamentale du maximum

$$\pm \int \varphi_{,} (x, y) \, \delta y . \, \delta x + \int \varphi_{2} (x, y) \frac{\overline{\delta y}^2}{2} . \, \delta x \pm \ldots < 0. \quad (1)$$

Or, cette inégalité doit être satisfaite pour toutes les valeurs

de δy, elle devra donc l'être encore quand on donnera à δy une valeur telle qu'elle rende le premier terme $\int \varphi_{,}(x, y)\, \delta y . \delta x$ à lui seul plus grand que l'ensemble des autres termes de la série. On doit avoir dans ce cas

$$\pm \int \varphi_{,}(x, y)\, \delta y . \delta x < 0.$$

Or, quel que soit le signe de l'analepse, il est impossible de satisfaire à cette condition.

Pour que y puisse rendre $\int \varphi\,(x, y)\, \delta x$, il faut donc que sa valeur en x satisfasse à l'équation

$$\int \varphi_{,}(x, y)\, \delta y . \delta x = 0. \quad (2)$$

Ce qui exige que l'on ait

$$\varphi_{,}(x, y)\, \delta y = 0.$$

Or δy n'est pas nul ; la première condition du maximum est donc

$$\varphi_{,}(x, y) = 0. \quad [A]$$

Cette équation donnera la valeur de y en x qui peut rendre $\int \varphi\,(x, y)\, \delta x$ un maximum. A cause de l'équation (2) l'inégalité (1) devient

$$\int \varphi_{2}(x, y) \frac{\overline{\delta y}^2}{2} \delta x \pm \int \varphi_{3}(x, y) \frac{\overline{\delta y}^3}{2.3} . \delta x + \ldots < 0.$$

Pour que cette inégalité soit satisfaite dans tous les cas, on doit avoir constamment

$$\int \varphi_{2}(x, y) \frac{\overline{\delta y}^2}{2} . \delta x < 0.$$

Il faut donc que l'expression engagée sous le signe de l'analepsie reste constamment négative, ce qui exige que l'on ait

$$\varphi_{2}(x, y) < 0. \quad [A]$$

Telles sont les conditions auxquelles doit satisfaire la valeur de y qui rend k un maximum. On trouverait de même pour le minimum les deux conditions suivantes

$$\varphi_{,}(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_{2}(x, y) > 0.$$

Dans ce qui précède comme dans ce qui va suivre, nous considérons les analepses indépendamment des limites entre lesquelles on les étend, parce que tout ce qui concerne la forme de la fonction $f(x)$ est indépendante de ces limites. Si après avoir épuisé les considérations relatives à la forme de $f(x)$ on veut appliquer la théorie des maxima et des minima aux limites de l'analepse, on pourra y procéder d'après les règles du § 82. On comprend aussi que les conditions du maximum ou du minimum peuvent n'être satisfaites que lorsqu'on prend les valeurs de x entre de certaines limites ; dans ce cas la fonction $f(x)$ donne une valeur maxima ou minima à l'analepse étendue entre ces limites, ou des limites plus restreintes.

Le cas que nous venons de considérer étant complétement résolu, nous passerons à une expression plus compliquée.

84. Soit l'analepse

$$z = \int \varphi(x, y, y') \, \delta x,$$

dans laquelle nous supposons

$$y = f(x) \quad \text{et} \quad y' = \frac{\delta y}{\delta x}.$$

Cherchons la forme de la fonction $f(x)$ qui rend z un maximum ou minimum pour toutes les valeurs de x. A cet effet désignons, comme précédemment, par δy et par h les accroissements respectifs que reçoivent les quantités y et y' quand la forme de la fonction $f(x)$ varie. On aura pour le maximum

$$\int \varphi(x, y \pm \delta y, y' \pm h) \, \delta x - \int \varphi(x, y, y') \, \delta x < 0.$$

D'où, en remarquant que

$$\int \varphi\,(x.y \pm \delta y, y' \pm h) =$$

$$\int \left[\begin{array}{r} \varphi\,(x,y,y') \pm \varphi_{\prime}\,(x,y,y')\,\delta y + \varphi_{2}\,(x,y,y')\,\frac{\overline{\delta y}^2}{2} \pm \ldots \\ \pm\,{}_{\prime}\varphi\,(x,y,y')\,h + {}_{\prime}\varphi_{\prime}\,(x,y,y')\,\delta y.\,h \pm \ldots \\ + \,{}_{2}\varphi\,(x,y,y')\,\frac{h^2}{2} \pm \ldots \end{array}\right] \delta x$$

on déduit

$$\pm \int [\varphi_{\prime}\,(x,y,y')\,\delta y + {}_{\prime}\varphi\,(x,y,y')\,h]\,\delta x$$

$$+ \int \left[\varphi_{2}(x,y,y')\,\frac{\overline{\delta y}^2}{2} + {}_{\prime}\varphi_{\prime}\,(x,y,y')\,\delta y.\,h + {}_{2}\varphi\,(x,y,y')\,\frac{h^2}{2}\right] \delta x \pm \ldots < 0. \quad (1)$$

Cette inégalité devant être satisfaite pour toutes les valeurs de δy, devra l'être encore quand on attribuera à cette quantité une forme en x, telle qu'elle rende la première analepse à elle seule plus grande que l'ensemble des autres analepses de la série. On doit donc avoir

$$\pm \int [\varphi_{\prime}\,(x,y,y')\,\delta y + {}_{\prime}\varphi\,(x,y,y')\,h]\,\delta x < 0.$$

Cette condition ne pouvant jamais être satisfaite, il faut que l'on ait pour le maximum

$$\int [\varphi_{\prime}\,(x,y,y')\,\delta y + {}_{\prime}\varphi\,(x,y,y')\,h]\,\delta x = 0, \quad (2)$$

d'où

$$\varphi_{\prime}\,(x,y,y')\,\delta y + {}_{\prime}\varphi\,(x,y,y')\,h = 0, \quad [\mathrm{A}]$$

l'équation (2) transforme la condition (1) en la suivante

$$\int \left[\varphi_{2}\,(x,y,y')\,\frac{\overline{\delta y}^2}{2} + {}_{\prime}\varphi_{\prime}\,(x,y,y')\,\delta y\,h \right.$$

$$\left. + \,{}_{2}\varphi\,(x,y,y')\,\frac{h^2}{2}\right] \delta x \pm \ldots < 0,$$

d'où l'on déduit par des raisonnements suffisamment connus

$$\int\left[\varphi_2(x,y,y')\frac{\overline{\delta y}^2}{2}+{}_{,}\varphi_{,}(x,y,y')\,\delta y.h\right.$$

$$\left.+{}_{2}\varphi(x,y,y')\frac{h^2}{2}\right]\delta x<0,\quad (3)$$

ce qui exige que l'on ait

$$\varphi_2(x,y,y')\frac{\overline{\delta y}^2}{2}+{}_{,}\varphi_{,}(x,y,y')\,\delta y.h+{}_{2}\varphi(x,y,y')\frac{h^2}{2}<0.\quad [B]$$

On pourrait arriver aux conditions subséquentes en partant des conditions (2) et (3); mais les expressions [A] et [B] en étant des conséquences rigoureuses, on en déduit immédiatement en comparant ces conditions aux conditions [A] et [B] du paragraphe 78,

$$\varphi_{,}(x,y,y')=0,\qquad {}_{,}\varphi(x,y,y')=C$$

$$\varphi_2(x,y,y')<0,\qquad {}_{2}\varphi(x,y,y')<0$$

$$\text{et}\quad \varphi_2(x,y,y').\,{}_{2}\varphi(x,y,y')>[{}_{,}\varphi_{,}(x,y,y)]^2,$$

et pour le minimum

$$\varphi_{,}(x,y,y')=0,\qquad {}_{,}\varphi(x,y,y')=C$$

$$\varphi_2(x,y,y')>0,\qquad {}_{2}\varphi(x,y,y')>0$$

$$\varphi_2(x,y,y').\,{}_{2}\varphi(x,y,y')>[{}_{,}\varphi_{,}(x,y,y')]^2$$

85. On pourrait avoir aussi

$$z=\int\varphi(x,y,y',y'')\,\delta x,$$

en même temps que

$$y=f(x),\quad y'=\frac{\delta y}{\delta x},\quad y''=\frac{\delta.\dfrac{\delta y}{\delta x}}{\delta x},$$

et se demander quelle serait, dans ce cas, la forme qu'il faudrait attribuer à la fonction $f(x)$ pour rendre z un maximum ou un minimum. Représentons respectivement par δy, h et k les accroissements que reçoivent les quantités y, y' et y'', quand la forme de $f(x)$ change; nous aurons pour le maximum

$$\int \varphi_{,}(x,\ y \pm \delta y,\ y' \pm h,\ y'' \pm k)\,\delta x - \int \varphi\,(x, y, y', y'')\,\delta x < 0;$$

d'où l'on déduit, en développant $\int \varphi\,(x, y \pm \delta y, y' \pm h, y'' \pm k)\,\delta x$ en série

$$\left.\begin{array}{l}
\pm \int \left[\varphi_{,}(x, y, y', y'')\,\delta y + {}_{,}\varphi\,(x, y, y', y'')\,h + {}'\varphi\,(x, y, y', y'')\,k\right]\delta x \\
+ \int \left[\begin{array}{l} \varphi_{2}(x, y, y', y'')\,\dfrac{\overline{\delta y}^2}{2} + {}_{,}\varphi_{,}(x, y, y', y'')\,\delta y . h + {}'\varphi_{,}(x, y, y', y'')\,\delta y\, k \\ + {}_{2}\varphi\,(x, y, y', y'')\,\dfrac{h^2}{2} + {}_{,}'\varphi\,(x, y, y', y'')\,h . k + {}^{2}\varphi\,(x, y, y', y'')\,\dfrac{k^2}{2} \end{array}\right]\delta x \\
\pm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} < 0.$$

Cette inégalité nous conduit aux deux conditions suivantes

$$+ \int \left[\varphi_{,}(x, y, y', y'')\,\delta y + {}_{,}\varphi\,(x, y, y', y'')\,h + {}'\varphi\,(x, y, y', y'')\,k\right]\delta x = 0. \quad (1)$$

$$\int \left[\begin{array}{l} \varphi_{2}(x, y, y', y'')\,\dfrac{\overline{\delta y}^2}{2} + {}_{,}\varphi_{,}(x, y, y', y'')\,\delta y . h + {}'\varphi_{,}(x, y, y', y'')\,\delta y . k \\ + {}_{2}\varphi\,(x, y, y', y'')\,\dfrac{h^2}{2} + {}_{,}'\varphi\,(x, y, y', y'')\,hk + {}^{2}\varphi\,(x, y, y', y'')\,\dfrac{k^2}{2} \end{array}\right]\delta x < 0. \quad (2)$$

qui doivent être satisfaites dans tous les cas par la fonction qui rend z un maximum. Ces deux conditions (1) et (2) exigent que l'on ait

$$\varphi_{,}(x, y, y', y'')\,\delta y + {}_{,}\varphi\,(x, y, y', y'')\,h$$
$$+ {}'\varphi\,(x, y, y', y'')\,k = 0. \quad [\mathrm{A}]$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{matrix}\varphi_{2}(x, y, y', y'')\dfrac{\overline{\delta y}^2}{2} + {}_{,}\varphi_{,}(x, y, y', y'')\,\delta y . h + {}'\varphi_{,}(x, y, y', y'')\,\delta y . k \\ + {}_{2}\varphi(x, y, y', y'')\dfrac{h^2}{2} + {}_{,}{}'\varphi(x, y, y', y'')\,hk + {}^{2}\varphi(x, y, y', y'')\dfrac{k^2}{2}\end{matrix}\right\} < 0. \quad [B]$$

Ces deux conditions étant identiques à celles du § 79, elles nous conduisent, en passant par les mêmes raisonnements, aux douze conditions suivantes, qui doivent être satisfaites dans le cas du maximum :

$$\varphi_{,}(x, y, y', y'') = 0, \qquad {}_{,}\varphi(x, y, y', y'') = C,$$

$${}'\varphi(x, y, y', y'') = C' x + C'', \qquad \varphi_{2}(x, y, y', y'') < 0,$$

$${}_{2}\varphi(x, y, y', y'') < 0, \qquad {}^{2}\varphi(x, y, y', y'') < 0,$$

$$\varphi_{2}(x, y, y', y'') . {}_{2}\varphi(x, y, y', y'') > [{}_{,}\varphi_{,}(x, y, y', y'')]^2,$$

$$\varphi_{2} . {}^{2}\varphi > [{}'\varphi_{,}]^2, \qquad {}_{2}\varphi . {}^{2}\varphi > [{}_{,}{}'\varphi]^2.$$

$$[({}_{,}\varphi_{,})^2 - {}_{2}\varphi . \varphi_{2}]\ [({}'\varphi_{,})^2 - {}^{2}\varphi . \varphi_{2}] > [{}_{,}\varphi_{,} . {}'\varphi_{,} + {}_{,}{}'\varphi . \varphi_{2}]^2$$

$$[({}_{,}\varphi_{,})^2 - \varphi_{2} . {}_{2}\varphi]\ [({}_{,}{}'\varphi)^2 - {}^{2}\varphi . {}_{2}\varphi] > [{}_{,}\varphi_{,} . {}_{,}{}'\varphi + {}'\varphi_{,} . {}_{2}\varphi]^2$$

$$[({}_{,}{}'\varphi)^2 - {}_{2}\varphi . {}^{2}\varphi]\ [({}'\varphi_{,})^2 - \varphi_{2} . {}^{2}\varphi] > [{}_{,}{}'\varphi . {}'\varphi_{,} + {}_{,}\varphi_{,} . {}^{2}\varphi]^2$$

Pour le minimum on trouverait douze conditions identiques à celles-ci, à l'exception des 4e, 5e et 6e qui deviennent dans ce cas

$$\varphi_{2}(x, y, y', y'') > 0, \quad {}_{2}\varphi(x, y, y', y'') > 0, \quad {}^{2}\varphi(x, y, y', y'') > 0.$$

Comme on le voit, toutes ces conditions sont les mêmes que celles que nous avons obtenues en appliquant les considérations de maximis et minimis aux fonctions des fonctions. Nous n'étendrons pas ces considérations à des expressions plus compliquées, car elles donnent lieu à des transformations plus laborieuses que difficiles. Comme plus haut, nous discuterons

encore deux espèces d'analepses dans lesquelles il y a deux fonctions de x engagées sous le signe de l'analepsie.

86. Soit l'analepse

$$v = \int \varphi\,(x, y, z)\,\delta x,$$

dans laquelle $y = f(x)$ et $z = \mathrm{F}\,(x)$; on demande quelle forme doivent prendre les fonctions $f(x)$ et $\mathrm{F}(x)$ pour rendre v un maximum ou un minimum. Désignons par δy et δz les accroissements respectifs de y et de z quand les fonctions $f(x)$ et $\mathrm{F}\,(x)$ changent de forme. Nous aurons, pour le maximum, à satisfaire à la condition

$$\int \varphi\,(x, y \pm \delta y, z \pm \delta z)\,\delta x - \int \varphi\,(x, y, z)\,\delta x < 0.$$

En développant le premier terme en série, cette inégalité devient

$$\left.\begin{array}{l} \pm \int [\varphi'\,(x, y, z)\,\delta y + {}_{,}\varphi\,(x, y, z)\,\delta z]\,\delta x \\ + \int \left[\varphi^2\,(x, y, z)\,\dfrac{\overline{\delta y}^2}{2} \pm {}_{,}\varphi'\,(x, y, z)\,\delta y . \delta z + {}_{{}_2}\varphi\,(x, y, z)\,\dfrac{\overline{\delta z}^2}{2}\right]\delta x \\ \pm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} < 0,$$

inégalité dans laquelle $\varphi'\,(x, y, z)$, $\varphi^2\,(x, y, z)$... marquent les dérivées de $\varphi\,(x, y, z)$ par rapport à y et ${}_{,}\varphi\,(x, y, z)$, ${}_{{}_2}\varphi\,(x, y, z)$... celles par rapport à z. On en tire immédiatement les deux conditions

$$\int [\varphi'\,(x, y, z)\,\delta y + {}_{,}\varphi\,(x, y, z)\,\delta z]\,\delta x = 0, \quad (1)$$

$$\int \left[\varphi^2\,(x, y, z)\,\frac{\overline{\delta y}^2}{2} \pm {}_{,}\varphi'\,(x, y, z)\,\delta y . \delta z + {}_{{}_2}\varphi\,(x, y, z)\,\frac{\overline{\delta z}^2}{2}\right]\delta x < 0, \quad (2)$$

d'où l'on déduit

$$\varphi'\,(x, y, z)\,\delta y + {}_{,}\varphi\,(x, y, z)\,\delta z = 0, \quad [\mathrm{A}]$$

$$\varphi''(x,y,z)\frac{\overline{\delta y}^2}{2} \pm {}_{\prime}\varphi'(x,y,z)\,\delta y.\delta z + {}_{\prime\prime}\varphi(x,y,z)\frac{\overline{\delta z}^2}{2} < 0, \quad [B]$$

conditions identiques à celles du § 77; si nous faisons la même hypothèse sur les quantités δy et δz, c'est-à-dire si nous supposons ces accroissements indépendants l'un de l'autre, ce qui exige qu'il n'y ait aucune relation nécessaire entre y et z, nous trouvons, comme dans le paragraphe cité, les cinq conditions à satisfaire par les fonctions $f(x)$ et $F(x)$ pour qu'elles rendent v un maximum ; ce sont

$$\varphi'(x,y,z) = 0, \quad {}_{\prime}\varphi(x,y,z) = 0, \quad \varphi''(x,y,z) < 0,$$

$${}_{\prime\prime}\varphi(x,y,z) < 0 \quad \text{et} \quad \varphi''(x,y,z).\,{}_{\prime\prime}\varphi(x,y,z) > [{}_{\prime}\varphi'(x,y,z)]^2.$$

Si nous avions raisonné sur le minimum, comme nous venons de le faire pour le maximum, nous aurions obtenu les cinq conditions

$$\varphi'(x,y,z) = 0, \quad {}_{\prime}\varphi(x,y,z) = 0, \quad \varphi''(x,y,z) > 0$$

$${}_{\prime\prime}\varphi(x,y,z) > 0 \quad \text{et} \quad \varphi''(x,y,z).\,{}_{\prime\prime}\varphi(x,y,z) > [{}_{\prime}\varphi'(x,y,z)]^2.$$

Si au contraire les accroissements δy et δz étaient dépendants l'un de l'autre, il faudrait connaître la relation qui lie y à z, avant de raisonner sur les conditions principales [A] et [B].

Voyons ce qui arrive si nous supposons que l'on ait

$$z = \Psi(y),$$

d'où

$$\delta z = \Psi'(y)\,\delta y.$$

Les conditions principales du maximum deviennent dans ce cas

$$\varphi'[x,y,\Psi(y)] + {}_{\prime}\varphi[x,y,\Psi(y)]\,\Psi'(y) = 0,$$

$$\varphi''[x,y,\Psi(y)] + 2\,{}_{\prime}\varphi'[x,y,\Psi(y)]\,\Psi'(y) + {}_{\prime\prime}\varphi(x,y,\Psi(y))\,\overline{\Psi'(y)}^2 < 0.$$

Digitized by Google

La première de ces conditions donnera la valeur de y en x qui peut rendre v un maximum, et la seconde marquera si cette fonction donne lieu à une valeur maxima pour $\varphi(x, y, z)$. A la rigueur, un pareil problème pourrait se résoudre par les règles du § 83; mais il est souvent plus facile d'arriver à la solution en passant par les transformations qui nous ont conduit aux conditions que nous venons de trouver.

87. Soit enfin à traiter l'analepse

$$v = \int \varphi(x, y, y', z, z')\, \delta x,$$

dans laquelle on a $y = f(x)$, $y' = \frac{\delta y}{\delta x}$, $z = \mathrm{F}(x)$ et $z' = \frac{\delta z}{\delta x}$. En nommant, comme au § 80, δy, h, δz et k les accroissements que reçoivent les quantités y, y', z et z', nous trouvons pour le maximum

$$\int \varphi(x, y \pm \delta y, y' \pm h, z \pm \delta z, z' \pm k)\, \delta x \; -$$
$$\int \varphi(x, y, y', z, z')\, \delta x < 0,$$

d'où l'on déduit, en nous servant des notations du paragraphe 80,

$$\left.\begin{array}{l} \pm \int [\varphi'(x, y, y', z, z')\, \delta y + \varphi_{,}(x, y, y', z, z')\, h \\ \qquad + {}_{,}\varphi(x, y, y', z, z')\, \delta z + {}'\varphi(x, y, y', z, z')\, k]\, \delta x, \\ + \int \left\{ \begin{array}{l} \varphi^{2}. \frac{\overline{\delta y}^{2}}{2} + \varphi_{2}. \frac{h^{2}}{2} + {}_{2}\varphi. \frac{\overline{\delta z}^{2}}{2}. + {}^{2}\varphi. \frac{k^{2}}{2}. + \varphi_{,}'. h\delta y \pm {}_{,}\varphi'\, \delta y . \delta z \\ \qquad \pm {}'\varphi'. k\delta y \pm {}_{,}\varphi_{,}. h\delta z \pm {}'\varphi_{,}. hk + {}_{,}'\varphi. k\, \delta z. \end{array} \right\} \delta x \\ \pm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\} < 0.$$

De cette formule on tire les deux conditions, identiques à celles du § 81,

$$\left.\begin{array}{l}\varphi'(x, y, y', z, z')\,\delta y + \varphi_{,}(x, y, y', z, z')\,h \\ + {}_{,}\varphi(x, y, y', z, z')\,\delta z + {}'\varphi(x, y, y', z, z')\,k\end{array}\right\} = 0. \quad [A]$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi^{2}.\dfrac{\overline{\delta y}^{2}}{2} + \varphi_{2}.\dfrac{h^{2}}{2} + {}_{2}\varphi.\dfrac{\overline{\delta z}^{2}}{2} + {}^{2}\varphi.\dfrac{k^{2}}{2} + \varphi_{,}'.\,h\,\delta y \\ \pm {}_{,}\varphi'.\,\delta y.\,\delta z \pm {}'\varphi'.\,k\,\delta y \pm {}_{,}\varphi_{,}.\,h\,\delta z \pm {}'\varphi_{,}.\,hk + {}_{,}'\varphi.\,k\,\delta z\end{array}\right\} < 0. \quad [B]$$

Comme nous l'avons vu, ces conditions, pour être toujours remplies, exigent que l'on satisfasse à trente-huit autres conditions, dont les huit premières sont

$$\varphi'(x, y, y', z, z') = 0, \qquad \varphi_{,}(x, y, y', z, z') = C,$$

$${}_{,}\varphi(x, y, y', z, z') = 0, \qquad {}'\varphi(x, y, y', z, z') = C',$$

$$\varphi^{2}(x, y, y', z, z') < 0, \qquad \varphi_{2}(x, y, y', z, z') < 0,$$

$${}_{2}\varphi(x, y, y', z, z') < 0, \qquad {}^{2}\varphi(x, y, y', z, z') < 0.$$

Pour le minimum, on sait que les 5[e], 6[e], 7[e] et 8[e] conditions changent seules de signe, les autres sont identiques à celles du maximum.

Pour rendre ces considérations plus claires, nous allons donner quelques applications qui permettront d'apprécier la fécondité des principes et des règles auxquelles nous sommes arrivé, en donnant plus d'extension à la théorie des maxima et minima.

APPLICATIONS.

88. On demande de trouver la plus courte distance entre deux courbes planes situées dans un même plan. Soient

$$y' = \varphi(x') \quad [A]$$

et

$$y'' = \Psi(x'') \quad [B]$$

les équations de ces courbes. Nous accentuons les coordonnées de ces courbes pour les distinguer des coordonnées générales dont nous devrons faire usage dans la discussion de ce problème.

La question se divise en deux parties bien distinctes. La première a pour but de déterminer suivant quel lieu géométrique doit se mesurer cette plus courte distance; dans la seconde, on cherche quelle position doit avoir ce lieu géométrique pour que la distance qu'il mesure soit un minimum. Or, quel que soit le lieu géométrique, la distance entre un point de la première courbe et un point de la seconde sera exprimée par

$$L = \int_{x'}^{x''} \sqrt{1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2}\, \delta x. \quad (a)$$

x' et x'' marquant respectivement les abscisses des points dont L mesure la distance. Il faut d'abord déterminer la rela-

tion qui doit exister entre y et x pour que L soit toujours un minimum. Or, l'expression

$$L = \int \sqrt{1 + y'^2}\, \delta x$$

rentre complétement dans le type général discuté au § 84. La fonction qui lie y à x devra donc satisfaire aux conditions trouvées dans ce paragraphe.

Dans le cas qui nous occupe nous avons

$$\varphi\,(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2},$$

d'où

$$\varphi_1\,(x, y, y') = 0$$

$$_1\varphi\,(x, y, y') = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

$$\varphi_2\,(x, y, y') = 0$$

$$_1\varphi_1\,(x, y, y') = 0$$

$$_2\varphi\,(x, y, y') = \frac{\sqrt{1 + y'^2} - \dfrac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}}}{(1 + y'^2)} = \frac{1}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

La première condition $\varphi_1\,(x, y, y') = 0$, est donc satisfaite par elle-même.

La seconde nous donne

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C$$

d'où

$$y' = C\sqrt{1 + y'^2}$$

$$y'^2 = C^2\,(1 + y'^2)$$

$$y'^2\,(1 - C^2) = C^2$$

$$y' = \sqrt{\frac{C^2}{1 - C^2}} = C',$$

Mais

$$y' = \frac{\partial y}{\partial x},$$

par conséquent

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \mathrm{C},$$

d'où

$$y = \mathrm{C}x + \mathrm{C}'. \quad (1)$$

Cette valeur de y, substituée dans les autres conditions du minimum, donne

$$\varphi^2(x, y, y') = 0, \qquad \varphi(x, y, y') = \frac{1}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1+\mathrm{C}^2)^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

$$\text{et} \quad 0 \times \frac{1}{(1+\mathrm{C}^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Les cinq conditions sont donc satisfaites, ce qui prouve, comme on pouvait le prévoir d'ailleurs, que la plus courte distance doit se mesurer suivant une ligne droite.

Cela posé, il s'agit de déterminer les constantes C et C' de l'équation (1) de manière à ce qu'elle s'applique au problème dont la solution nous occupe en ce moment. Or, la droite que cette équation représente doit mesurer la plus courte distance entre les deux courbes [A] et [B], elle doit donc avoir un point commun avec chacune de ces courbes. Ce qui exige que son équation soit satisfaite par les coordonnées d'un point quelconque pris sur chacune de ces courbes. On aura par conséquent

$$y' = \mathrm{C}x' + \mathrm{C}'$$

$$y'' = \mathrm{C}x'' + \mathrm{C}',$$

d'où l'on tire les valeurs de C et C'

$$\mathrm{C} = \frac{y' - y''}{x' - x''}$$

$$\mathrm{C}' = \frac{y''\,x' - y'\,x''}{x' - x''}.$$

Nous aurons par conséquent

$$\frac{\delta y}{\delta x} = C = \frac{y' - y''}{x' - x''}.$$

Si nous substituons cette valeur de $\frac{\delta y}{\delta x}$ dans l'équation (a), il vient, pour l'expression de la distance,

$$L = \int_{x'}^{x''} \sqrt{1 + \left(\frac{y' - y''}{x' - x''}\right)^2}\, \delta x.$$

Reste à déterminer la position de la droite qui mesure cette plus courte distance. Or, cette position dépend évidemment des points des courbes [A] et [B] par lesquelles passe la droite de plus courte distance. Il faut donc déterminer les coordonnées de ces points, ce qui revient à chercher la valeur des limites x' et x'' qui rendront L un minimum. Mais ici nous ne pouvons appliquer les règles du § 82, car la fonction engagée sous le signe de l'analepsie renferme les limites x' et x''. Le moyen le plus court consiste à chercher l'analepse générale de l'expression, de l'étendre entre les limites x' et x'', et d'y appliquer ensuite les procédés de la théorie des maxima et minima. Or,

$$\int \sqrt{1 + \left(\frac{y' - y''}{x' - x''}\right)^2}\, \delta x = \sqrt{1 + \left(\frac{y' - y''}{x' - x''}\right)} \int \delta x =$$

$$x \sqrt{1 + \left(\frac{y' - y''}{x' - x''}\right)^2}.$$

Par conséquent,

$$L = (x'' - x') \sqrt{1 + \left(\frac{y' - y''}{x' - x''}\right)^2}.$$

Telle est l'expression dans laquelle il faut déterminer x' et

x'' de manière à rendre L un minimum. Or, d'après les règles du § 40, il faut d'abord que

$$\frac{\delta L}{\delta x'} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\delta L}{\delta x''} = 0,$$

ce qui donne, puisque

$$\frac{\delta L}{\delta x'} = -\sqrt{1+\left(\frac{y'-y''}{x'-x''}\right)^2} + (x''-x')\,\frac{\left(\frac{y'-y''}{x'-x''}\right)\left[\frac{(x'-x'')\frac{\delta y'}{\delta x'}-(y'-y'')}{(x'-x'')^2}\right]}{\sqrt{1+\left(\frac{y'-y''}{x'-x''}\right)^2}},$$

$$-1-\left(\frac{y'-y''}{x'-x''}\right)^2-(y'-y'')\left[\frac{(x'-x'')\frac{\delta y'}{\delta x'}-(y'-y'')}{(x'-x'')^2}\right]=0$$

ou

$$-(x'-x'')^2-(y'-y'')^2-(y'-y'')(x'-x'')\frac{\delta y'}{\delta x'}+(y'-y'')^2=$$

$$-(x'-x'')^2-(y'-y'')(x'-x'')\frac{\delta y'}{\delta x'}=0,$$

d'où

$$(x'-x'')+(y'-y'')\frac{\delta y'}{\delta x'}=0. \quad (2)$$

De même la seconde condition nous conduirait à l'équation

$$(x'-x'')+(y'-y'')\frac{\delta y''}{\delta x''}=0. \quad (3)$$

Ces deux équations donneront les valeurs de x' et x'' qui sont aptes à rendre L un minimum. Mais ces valeurs ne peuvent se déterminer aussi longtemps que la forme des fonctions $\varphi(x')$ et $\Psi(x'')$ restera indéterminée. Ce n'est que lorsque l'on connaîtra les équations de ces courbes, que l'on pourra s'assurer de l'existence ou de la non-existence d'un minimum.

Cependant, tout en restant sous la forme générale, les équa-

tions (2) et (3) nous donneront une indication précieuse sur la position de la droite de plus courte distance.

En effet, de ces équations on tire

$$-\frac{\delta x'}{\delta y'}=\frac{y'-y''}{x'-x''}$$

$$-\frac{\delta x''}{\delta y''}=\frac{y'-y''}{x'-x''},$$

d'un autre côté, nous avons

$$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{y'-y''}{x'-x''}.$$

Or, $-\frac{\delta x'}{\delta y'}$ et $-\frac{\delta x''}{\delta y''}$ marquent respectivement les tangentes des angles que font avec l'axe des abscisses les normales menées aux courbes [A] et [B] par les points (x', y') et (x'', y''); d'un autre côté $\frac{\delta y}{\delta x}$ indique la tangente de l'angle que fait la droite de plus courte distance avec le même axe des coordonnées; de plus, cette droite passe par les deux points (x', y') et (x'', y''); il s'ensuit nécessairement que *la ligne de plus courte distance est à la fois normale aux deux courbes.*

Quant aux autres conditions, nous ne pouvons rien statuer à leur égard aussi longtemps que la question restera dans toute sa généralité. Cependant avant de terminer ce paragraphe nous avons encore une remarque à faire.

On comprend que les valeurs de x' et x'' qui satisfont aux équations (2) et (3), peuvent, étant substituées dans les dérivées secondes de L, satisfaire aux trois conditions du maximum

$$\frac{\delta.\frac{\delta L}{\delta x'}}{\delta x'}<0,\quad \frac{\delta.\frac{\delta L}{\delta x''}}{\delta x}<0,\quad \frac{\delta.\frac{\delta L}{\delta x'}}{\delta x'}.\frac{\delta.\frac{\delta L}{\delta x''}}{\delta x''}>\left[\frac{\delta.\frac{\delta L}{\delta x'}}{\delta x''}\right]^2.$$

C'est qu'en effet il peut exister une valeur maxima pour la distance *mesurée suivant une ligne droite.* Car nous avons bien prouvé que la ligne qui mesure la plus courte distance doit être droite; mais nous n'avons pas démontré que la distance mesurée par ce lieu géométrique ne puisse pas prendre une valeur maxima. En effet, il peut exister une distance mesurée suivant une droite, plus grande que toutes les autres distances mesurées suivant le même lieu géométrique. Telles sont les conséquences que l'on doit tirer de ce qui précède. Nous voyons en outre que la distance maxima doit être mesurée également suivant une droite normale aux deux courbes [A] et [B].

En examinant attentivement la marche que nous venons de suivre, nous voyons que les considérations de maximis et minimis relatives à la forme de la valeur de y en x, nous ont donné le lieu géométrique suivant lequel doit se mesurer la plus courte distance, et que l'application de la théorie des maxima et des minima aux limites de l'analepse nous a conduit à la position que doit prendre le lieu géométrique, pour répondre à la question proposée. Le rôle que joue chacune de ces applications est donc bien distinct; le calcul des variations, tel qu'il existait auparavant, avait entre autres défauts celui de ne pas montrer cette distinction capitale; il lui eût été d'ailleurs impossible de rien prouver à cet égard.

89. Soit, en second lieu, à trouver la plus courte distance entre deux points situés sur la surface d'une sphère.

Il s'agit de déterminer l'équation du lieu géométrique suivant lequel doit se mesurer cette distance. Mais la ligne de plus courte distance devant se trouver sur la surface de la sphère dont nous représentons l'équation par

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \quad (1)$$

il faudra déterminer l'équation d'une autre surface sur laquelle doit également se trouver cette ligne pour qu'elle donne une distance minima. Or, quelle qu'en soit l'équation, nous aurons pour l'expression de la distance

$$L = \int \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, \delta x.$$

y' représentant la dérivée de y par rapport à x, et z' la dérivée de z par rapport à la même variable. Mais cette expression, qu'il s'agit de rendre un minimum, rentre entièrement dans le type discuté au § 87. La fonction qui rendra L un minimum doit donc satisfaire à la condition [A] de ce paragraphe, cette condition est

$$\varphi' . \delta y + \varphi_{,} . \frac{\delta . \delta y}{\delta x} + {}_{,}\varphi . \delta z + {}'\varphi . \frac{\delta . \delta z}{\delta x} = 0.$$

Mais les accroissements δy et δz sont dépendants, puisque y est lié à z par l'équation (1), cette équation ne peut donc pas être divisée. Nous devons par conséquent la considérer sous sa forme complète; cependant dans cet état elle serait très-difficile à interpréter, nous allons lui faire subir une transformation, en faisant sortir les quantités δy et δz du signe sous lequel elles se trouvent engagées.

Par une transformation bien connue, on déduit de cette égalité la suivante

$$\left.\begin{matrix} \left[\varphi' - \frac{\delta . \varphi_{,}}{\delta x}\right] \delta y + \left[{}_{,}\varphi - \frac{\delta' . \varphi}{\delta x}\right] \delta z \\ \frac{\delta . [\varphi_{,} . \delta y + {}'\varphi . \delta z]}{\delta x} \end{matrix}\right\} = 0. \quad (2)$$

Cette égalité doit être satisfaite pour toutes les valeurs de δy ou δz; elle devra donc l'être encore quand δy ou δz

aura une valeur telle que l'expression $[\varphi_, \delta y + {}'\varphi \delta z]$ devienne indépendante de x, dans ce cas on a, d'après l'égalité (2),

$$\left[\varphi' - \frac{\delta.\varphi_,}{\delta x}\right]\delta y + \left[{}_,\varphi - \frac{\delta.{}'\varphi}{\delta x}\right]\delta z = 0, \quad (a)$$

ce qui donne pour (2)

$$\frac{\delta.[\varphi_, \delta y + {}'\varphi.\delta z]}{\delta z} = 0,$$

d'où l'on tire par analepsie

$$\varphi_,.\delta y + {}'\varphi.\delta z = C, \quad (b)$$

C désignant une quantité indépendante de x.

Cela posé, appliquons ces conditions au problème qui nous occupe, nous avons

$$\varphi(x, y, y', z, z') = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2},$$

d'où

$$\varphi' = 0, \quad \varphi_, = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}, \quad {}_,\varphi = 0, \quad {}'\varphi = \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}},$$

substituant ces valeurs dans (a), il vient

$$-\frac{\delta.\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}}{\delta x}\delta y - \frac{\delta.\dfrac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}}{\delta x}.\delta z = 0,$$

ou

$$\frac{\delta.\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}}{\delta x}.\delta y + \frac{\delta.\dfrac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}}{\delta x}\delta z = 0. \quad (a')$$

Mais d'après l'équation (1) nous avons

$$\frac{\delta z}{\delta y} = -\frac{y}{z},$$

(a') devient par conséquent

$$\frac{\delta . \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}}{\delta x} - \frac{\delta . \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}}{\delta x} . \frac{y}{z} = 0$$

ou

$$\frac{\delta . \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}}{\delta x} . z - \frac{\delta . \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}}{\delta x} y = 0.$$

Nous devons tacher d'analepser cette équation par rapport à x; on y parvient facilement en ajoutant et retranchant la quantité

$$\frac{y'.z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} . \frac{\delta z}{\delta x} = \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} . \frac{\delta y}{\delta x},$$

ce qui nous donne

$$\left. \begin{aligned} & z \frac{\delta . \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}}{\delta x} + \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} . \frac{\delta . z}{\delta x} \\ & - y \frac{\delta . \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}}{\delta x} - \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} . \frac{\delta . y}{\delta x} \end{aligned} \right\} = 0,$$

d'où l'on tire, en analepsant,

$$\frac{zy'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} - \frac{yz'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = \text{C}.$$

Cette équation ne pourrait s'analepser que par des transformations excessivement compliquées; nous devons donc nous aviser d'un autre moyen pour arriver à la relation cherchée, entre y, z et x. On y arrive aisément en remarquant que ces trois variables entrent de la même manière

dans la question; on doit donc obtenir un résultat identique, en prenant y ou z pour la variable par rapport à laquelle on prend l'analepse qui donne la valeur de L. Pour rendre la comparaison plus facile, nous ferons subir une petite transformation à l'égalité que nous venons d'obtenir; multiplions-en les deux membres par $\sqrt{1+y'^2+z'^2}$ et par δx, il vient

$$z\delta y - y\delta z = C\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2} \quad (\alpha)$$

Si nous avions pris l'analepse L par rapport à y, nous aurions trouvé

$$x\delta z - z\delta x = C'\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2} \quad (\beta)$$

et par rapport à z

$$y\delta x - x\delta y = C''\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2} \quad (\gamma)$$

Multipliant chacune de ces équations par la variable qui n'y entre pas, nous aurons

$$xz\delta y - xy\delta z = Cx\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2} \quad (\alpha')$$

$$xy\delta z - yz\delta x = C'y\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2} \quad (\beta')$$

$$zy\delta x - zx\delta y = C''z\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}. \quad (\gamma')$$

Ajoutant ces trois égalités membre à membre, nous trouvons

$$[Cx + C'y + C''z]\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2} = 0,$$

d'où

$$Cx + C'y + C''z = 0.$$

Telle est la relation qui doit exister entre x, y et z pour que L soit un minimum. Mais cette équation est celle d'un plan passant par l'origine des coordonnées, qui est le centre de la sphère; il s'ensuit que la plus courte distance


Google

entre deux points sur la surface d'une sphère se mesure suivant l'axe d'un grand cercle, propriété qui a déjà été démontrée en géométrie élémentaire.

Mais assurons-nous si l'égalité (*a*) satisfait à toutes les conditions du minimum. Nous avons d'abord l'égalité (*b*) à satisfaire; cette égalité devient dans le problème qui nous occupe

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}.\,\delta y+\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}.\,\delta z=\text{constante}. \quad (b')$$

Or, nous savons que

$$y'=\frac{\delta y}{\delta x} \quad \text{et} \quad z'=\frac{\delta z}{\delta x}.$$

D'un autre côté on tire de l'équation (*d*)

$$\frac{\delta y}{\delta x}=-\frac{C}{C'}, \quad \frac{\delta z}{\delta x}=-\frac{C}{C''} \quad \text{et} \quad \delta z=-\frac{C'}{C''}\,\delta y.$$

(*b'*) devient donc

$$\left[\frac{\frac{C}{C''}.\,\frac{C'}{C''}}{\sqrt{1+\frac{C^2}{C'^2}+\frac{C^2}{C''^2}}}-\frac{\frac{C}{C'}}{\sqrt{1+\frac{C^2}{C'^2}+\frac{C^2}{C''^2}}}\right]\delta y=\text{constante}.$$

Quand nous disons constante, nous entendons une quantité indépendante de x; ceci résulte de ce que cette constante a été introduite par une analepsie effectuée par rapport à cette variable; il s'ensuit que cette condition est satisfaite, car δy est indépendant de x.

Pour rendre ce qui est relatif à la condition (*b*) plus clair et pour éviter toute objection, nous allons prouver d'une manière absolue que cette expression est constante,

c'est-à-dire indépendante de x. L'égalité (b) peut se mettre sous la forme

$$\left[\varphi' + '\varphi.\frac{\delta z}{\delta y}\right]\delta y = \text{C}.$$

Pour que le premier membre soit indépendant de x, il faut et il suffit que la quantité $\varphi_{,} + '\varphi\,\frac{\delta z}{\delta x}$ ne dépende pas de cette variable.

Or, nous avons trouvé, d'après l'équation de la sphère,

$$\frac{\delta z}{\delta y} = -\frac{y}{z},$$

par conséquent

$$\varphi_{,} + '\varphi.\frac{\delta z}{\delta y} = \varphi_{,} - '\varphi.\frac{y}{z}.$$

C'est cette quantité qui doit être démontrée indépendante de x. Par le seul raisonnement on prouve aisément qu'il en est ainsi; car nous avons vu que $_{,}\varphi$ et $'\varphi$ sont constants; d'un autre côté, le rapport $\frac{y}{z}$ peut prendre toutes les valeurs compatibles avec la sphère, sans que x ne varie. Il est donc bien prouvé que l'expression proposée est indépendante de x : c'est ce que nous pouvons d'ailleurs démontrer analytiquement. En effet, nous savons : pour qu'une quantité soit indépendante de x, il faut que, variée par rapport à cette variable, on obtienne un résultat égal à zéro. Or si nous varions cette expression par rapport à x, en remarquant toujours que $'\varphi$ et φ' sont constants, il vient

$$\frac{\delta.\left[\varphi_{,} - '\varphi.\frac{y}{z}\right]}{\delta x} = -\,'\varphi\,\frac{\left[z\,\frac{\delta y}{\delta x} - y\,\frac{\delta z}{\delta x}\right]}{z^2}.$$

Or, l'équation (1) donne

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{x}{y} \quad \text{et} \quad \frac{\delta z}{\delta x} = -\frac{x}{z},$$



Par conséquent

$$-{}'\varphi\left[\frac{z.\frac{\partial y}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2}\right]=-{}'\varphi\left[\frac{x-x}{z^2}\right]=0.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Reste à voir si la condition [B] du § 87 est également remplie. A cet effet nous devons chercher les dérivées secondes de $\sqrt{1+y'^2+z'^2}$ par rapport à y, y', z et z'. Ce qui donne

$$\varphi^2=0,\quad \varphi_2=\frac{1+z'^2}{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}},\quad {}_2\varphi=0,\quad {}^2\varphi=\frac{1+y'^2}{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\varphi_{\prime}{}'=0,\quad {}_{\prime}\varphi'=0,\quad {}'\varphi'=0,\quad {}_{\prime}\varphi_{\prime}=0,\quad {}_{\prime}{}'\varphi=0$$

$$'\varphi_{\prime}=-\frac{y'\,z'}{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Par conséquent [B] devient dans le cas qui nous occupe

$$\frac{1+z'^2}{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial.\partial y}{\partial x}\right)-\frac{y'\,z'}{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\partial.\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial.\partial z}{\partial x}\right)$$

$$+\frac{1+y'^2}{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{1}{2}.\left(\frac{\partial.\partial z}{\partial x}\right)^2>0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$\frac{1+z'^2}{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}>0,\qquad \frac{1+y'^2}{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}>0$$

$$\text{et}\quad \frac{(1+z'^2)(1+y'^2)}{(1+y'^2+z'^2)^3}>\frac{z'^2\,y'^2}{(1+y'^2+z'^2)^3},$$

mais

$$y'=-\frac{C}{C'},\qquad z'=-\frac{C}{C''},$$

par conséquent

$$\frac{1+\frac{C^2}{C'^2}}{\left(1+\frac{C^2}{C'^2}+\frac{C^2}{C''^2}\right)^{\frac{3}{2}}} > 0, \qquad \frac{1+\frac{C^2}{C''^2}}{\left(1+\frac{C^2}{C'^2}+\frac{C^2}{C''^2}\right)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

$$\frac{\left(1+\frac{C^2}{C'^2}\right)\left(1+\frac{C^2}{C''^2}\right)}{\left(1+\frac{C^2}{C'^2}+\frac{C^2}{C''^2}\right)^{3}} > \frac{\frac{C^2}{C'^2}\cdot\frac{C^2}{C''^2}}{1+\frac{C^2}{C'^2}+\frac{C^2}{C''^2}}^{3}.$$

Ces trois conditions sont évidemment remplies; il s'ensuit que l'équation (*d*) donne lieu à un minimum pour L. Quant aux constantes C, C', C'', qui se réduisent à deux, car l'équation (*d*) peut se mettre sous la forme

$$x+\frac{C'}{C}y+\frac{C''}{C}z=0,$$

elles se déterminent au moyen des coordonnées des points dont on veut mesurer la plus courte distance; si nous nommons (x', y', z') et (x'', y'', z'') les coordonnées de ces points, nous trouverons les deux équations

$$x'+\frac{C'}{C}y'+\frac{C''}{C}z'=0$$

$$x''+\frac{C'}{C}y''+\frac{C''}{C}z''=0,$$

dont on déduit facilement les valeurs de $\frac{C'}{C}$ et $\frac{C''}{C}$.

On trouve de cette manière, pour l'équation du plan,

$$(y'z''-y''z')\,x+(x''z'-x'z'')\,y+(x'y''-x''y')\,z=0.$$

90. Cherchons encore la plus courte distance entre deux points situés sur le cylindre

$$y^2+x^2=r^2. \quad (1)$$

L'expression générale de la longueur est comme dans le paragraphe précédent,

$$L = \int \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, \delta x.$$

Nous aurons donc à remplir la condition

$$\frac{\delta . \dfrac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}}{\delta x} . \delta y + \frac{\delta . \dfrac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}}{\delta x} \delta z = 0. \quad (2)$$

Mais si nous cherchons d'après (1) la relation qui existe entre δy et δz, nous trouvons

$$2y\, \delta y = 0,$$

donc

$$\delta y = 0.$$

L'équation (2) devient ainsi

$$\frac{\delta . \dfrac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}}{\delta x} . \delta z = 0,$$

d'où

$$\frac{\delta . \dfrac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}}{\delta x} = 0$$

ou

$$\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = C. \quad (3)$$

Dans cette équation nous avons

$$z' = \frac{\delta z}{\delta x} \quad \text{et} \quad y' = \frac{\delta y}{\delta x}.$$

Mais d'après l'équation (1), nous trouvons

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

L'équation (3) devient par conséquent

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}=C,$$

on en tire, en élevant au carré,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2=C^2\left(1+\frac{x^2}{r^2-x^2}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right),$$

d'où

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2(1-C^2)=\frac{C^2 x^2}{r^2-x^2},$$

par conséquent

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{Cz}{\sqrt{1-C^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}=C.\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}},$$

d'où l'on tire par analepsie

$$z=C\int\frac{\partial x}{\sqrt{r^2-x^2}}+C'=C\text{ arc }\left(\sin=\frac{x}{r}\right)+C',$$

ou

$$\frac{z-C'}{C}=\text{arc }\left(\sin=\frac{x}{r}\right),$$

donc enfin

$$x=r\sin\frac{z-C'}{C}.\quad(4)$$

On conclut de là que la projection de la ligne de plus courte distance sur le plan des xz est une sinusoïde.

Mais pour qu'il y ait minimum, nous avons encore d'autres conditions à satisfaire ; d'abord

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\cdot\partial y+\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\partial z=C.$$

Mais nous avons vu que $\delta y = 0$, cette condition devient donc

$$\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\,\delta z = \text{C}.$$

Pour qu'elle soit satisfaite, il faut que $\dfrac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}$ soit constant. Voyons ce que cette expression devient quand on y met au lieu de y' et z' leur valeur. Or

$$y' = \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}} \quad \text{et} \quad z' = \frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\text{C}}{\sqrt{r^2-x^2}},$$

par conséquent

$$\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = \frac{\dfrac{\text{C}}{\sqrt{r^2-x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{(r^2-x^2)}+\dfrac{\text{C}^2}{(r^2-x^2)}}} =$$

$$\frac{\text{C}}{\sqrt{r^2-x^2+x^2+\text{C}^2}} = \frac{\text{C}}{\sqrt{r^2+\text{C}^2}}.$$

Cette condition est donc remplie; voyons si les trois autres le sont également, savoir

$$\frac{1+y'^2}{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}} > 0, \quad \frac{1+z'^2}{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

$$\frac{(1+y'^2)(1+z'^2)}{(1+y'^2+z'^2)^3} > \frac{z'^2 \cdot y'^2}{(1+y'^2+z'^2)^3}.$$

Mettons au lieu de y' et de z' leur valeur, et il vient

$$\frac{\left(1+\dfrac{x^2}{r^2-x^2}\right)}{\left(1+\dfrac{x^2}{r^2-x^2}+\dfrac{\text{C}^2}{r^2-x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} > 0 \quad \frac{1+\dfrac{\text{C}^2}{r^2-x^2}}{\left(1+\dfrac{x^2}{r^2-x^2}+\dfrac{\text{C}^2}{r^2-x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

Par transformation ces conditions deviennent

$$\frac{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}{\left(\frac{r^2 + C^2}{r^2 + x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{r^2 \sqrt{r^2 - x^2}}{(r^2 + C^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

$$\frac{(r^2 - x^2 + C^2)\sqrt{r^2 - x^2}}{(r^2 + C^2)^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

lesquelles sont satisfaites pour tous les points qui se trouvent sur le cylindre, car dans ce cas on a toujours $x < r$; la troisième de ces conditions donne

$$\frac{\left(1 + \frac{C^2}{r^2 - x^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}\right)}{\left(1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} + \frac{C^2}{r^2 - x^2}\right)^3} > \frac{\frac{C^2}{r^2 - x^2} \cdot \frac{x^2}{r^2 - x^2}}{\left(1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} + \frac{C^2}{r^2 - x^2}\right)^3}$$

ou

$$\frac{r^2 (r^2 - x^2 + C^2)}{(r^2 + C^2)^3} > \frac{C^2 x^2}{(r^2 + C^2)^3}.$$

Cette condition est évidemment satisfaite puisque $x < r$; on aura donc toujours

$$r^2 C^2 > C^2 x^2$$

et à plus forte raison

$$r^2 C^2 + r^2 (r^2 - x^2) > C^2 x^2.$$

La courbe donnée par les deux équations (1) et (4) mesure donc la plus courte distance entre les deux points, pour lesquels on aura déterminé les constantes C et C'.

91. Soit enfin à chercher la courbe de plus vite descente entre deux points non situés sur la même verticale : cette courbe porte le nom de brachistochrone. Si nous nommons x' et x'' les abscisses des deux points que l'on con-

Digitized by Google

sidère, comptées suivant la ligne horizontale passant par le point supérieur, et si nous désignons par y l'ordonnée de la courbe décrite par le corps dans sa descente, on trouve, en mécanique, pour l'expression du temps,

$$t = \int_{x'}^{x''} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{x - x'}} \, \delta x.$$

C'est cette expression qu'il faut rendre un minimum en déterminant convenablement la valeur de y en x; elle rentre complétement dans le type discuté au § 80.

Dans la question qui nous occupe, nous avons

$$\varphi(x, y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{x - x'}},$$

d'où

$$\varphi_{,}(x, y, y') = 0$$

$$_{,}\varphi(x, y, y') = \frac{y'}{\sqrt{(x - x')(1 + y'^2)}}.$$

La première condition est donc satisfaite par elle-même; reste à remplir la seconde qui nous donne

$$\frac{y'}{\sqrt{(x - x')(1 + y'^2)}} = C,$$

d'où l'on tire en élevant au carré

$$y'^2 = C^2 (x - x')(1 + y'^2),$$

ou

$$y'^2 [1 - C^2 (x - x')] = C^2 (x - x'),$$

par conséquent

$$y' = C \sqrt{\frac{x - x'}{1 - C^2 (x - x')}},$$

ou

$$\frac{\partial y}{\partial x} = C\sqrt{\frac{x - x'}{1 - C^2(x - x')}}.$$

Si nous supposons l'origine des coordonnées placées au point de départ, nous aurons $x' = 0$, d'où

$$\frac{\partial y}{\partial x} = C\sqrt{\frac{x}{1 - C^2x}} = \sqrt{\frac{C^2x}{1 - C^2x}} = \sqrt{\frac{x}{\frac{1}{C^2} - x}} = \sqrt{\frac{x^2}{\frac{1}{C^2}x - x^2}}.$$

et si nous posons $\frac{1}{C^2} = 2a$, ce que nous pouvons toujours faire, il vient

$$\partial y = \partial x\sqrt{\frac{x^2}{2ax - x^2}}, \quad (1)$$

ce qui est l'équation d'une cycloïde décrite sur l'axe des x comme base, en partant de l'origine des coordonnées, par le cercle dont le rayon est a, quantité dont la valeur se détermine au moyen des coordonnées du point d'arrivée.

Assurons-nous si les autres conditions du minimum sont satisfaites; d'abord nous avons

$$\varphi_2(x\,y, y') = 0, \quad {}_2\varphi(x, y, y') = \frac{1}{\left[x^{\frac{1}{3}}(1 + y'^2)\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

et

$${}_1\varphi_1(x, y, y') = 0.$$

Pour qu'il y ait minimum, il faut et il suffit donc que l'on ait

$$\frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

Mettant au lieu de y' sa valeur $\sqrt{\frac{x^2}{2ax - x^2}}$, nous trouvons

$$\frac{1}{\sqrt{x}\left(1 + \frac{x^2}{2ax - x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}\left(\frac{2ax}{2ax - x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\left[\frac{2a\sqrt[3]{x}}{2a - x}\right]^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

Cette condition est évidemment satisfaite, puisque nous aurons toujours $x > 0$ et $x < 2a$, car pour que x pût égaler $2a$, il faudrait que le corps remontât à la hauteur d'où il est parti, ce qui est contre l'hypothèse qui constitue l'énoncé du problème. Il s'ensuit que depuis $x = 0$ jusqu'à $x = x''$, abscisses du point d'arrivée, l'équation (1) donne une valeur minima pour t. Nous pouvons donc en conclure que la cycloïde est la brachistochrone cherchée. Il est bien entendu que cette courbe est celle que l'on obtient quand on fait abstraction de toute résistance de frottement.

Tels sont les faits que j'avais à soumettre à l'appréciation du monde savant. Je ne me dissimule aucunement les nombreux défauts qui déparent cet ouvrage, mais j'espère qu'ils seront rachetés par la gradation que j'ai tâché de mettre dans la marche des idées. J'avais à réformer la science dans ce qu'elle a de plus intime, c'est-à-dire, dans son esprit; il fallait donc, afin de ne pas effrayer les esprits par une transition trop subite, détruire une à une et successivement les erreurs que j'avais à signaler. C'est là la seule raison qui m'ait porté à suivre la méthode que j'ai adoptée. On ne doit donc pas juger ce travail en prenant séparément chacune de ses parties, mais bien par l'ensemble des conclusions auxquelles j'arrive. Puis-je croire qu'il n'y ait plus rien à dire sur le sujet que je viens de traiter? Loin de moi une pareille pensée; je suis convaincu d'avoir, tout au plus, donné le germe des progrès que la science est appelée à faire incessamment; la difficulté de la tâche m'a seul empêché de traiter complétement le sujet; je fais donc un appel à toutes les intelligences, car, je le dis avec peine, il y a encore à travailler, et beaucoup à travailler pour faire

mériter aux sciences exactes la place élevée qu'elles n'occupent pas aussi légitimement qu'on pourrait le désirer.

Oserais-je espérer de voir adopter sans discussions les idées que je viens d'exposer? Évidemment non, car ce serait là une présomption impardonnable. Mais si je ne puis les croire à l'abri de la discussion, je peux du moins espérer que celle-ci sera aussi sérieuse que le sujet qu'elle comporte. J'espère, dis-je, que si une discussion s'engage, elle sera dégagée de toute passion; car je ne suis pas de ceux qui croient que du choc des idées jaillisse la lumière; il peut en résulter une étincelle qui éblouisse jusqu'à produire l'enthousiasme, mais il n'en résulte jamais cette lumière douce et forte qui donne une conviction stable; car cette dernière est toujours le fruit de la rencontre des idées qui, marchant sous l'égide de la bonne foi, se modifient dans ce qu'elles ont d'erroné et d'excessif, s'enrichissent mutuellement de leurs qualités, et nous conduisent enfin à la vérité que nous ne possédons pas toute entière quand on nous fait une opposition sérieuse et de bonne foi. Une pensée n'est jamais complétement fausse, car il y a toujours quelque point sur lequel l'esprit a raisonné juste; et, s'il arrive à une conclusion erronée, c'est que les points de comparaison lui ont manqué. Le premier élément de la conviction consiste donc à montrer dans une pensée où finit la vérité et où commence l'erreur. Il serait à souhaiter que cette marche fut adoptée dans toute discussion scientifique; les hommes y gagneraient aussi bien que la science.

———

NOTES.

NOTE I.

VARIATION DES FONCTIONS SIMPLES SANS LE SECOURS DE LA THÉORIE DES COEFFICIENTS INDÉTERMINÉS.

Dans le § 10 et les suivants, pour arriver à la variation des fonctions simples, nous nous sommes appuyé sur leur développement en série obtenu au moyen de la théorie des coefficients indéterminés, ou mieux à déterminer. Cette marche, quoique très-logique, pourrait cependant ne pas satisfaire certains esprits, et pourrait même leur faire croire qu'en obtenant ces mêmes séries par le théorème des dérivées, on circule, en quelque sorte, dans un cercle vicieux. Pour les rassurer à cet égard et pour leur prouver que le calcul des variations est complétement indépendant de cette théorie, nous allons successivement obtenir les variations de ces fonctious, sans nous servir des développements dont il vient d'être parlé.

Soit la fonction

$$y = x^m$$

dont il faille obtenir la variation.

Nous discuterons séparément chacun des quatre cas qui peuvent se présenter pour cette fonction, dans laquelle on peut avoir :

1° m entier et positif;

2° m » et négatif;

3° m fractionnaire et positif;

4° m » et négatif.

1° Si m est entier et positif, il vient, en donnant à x l'accrois-

sement Δx et nommant Δy l'accroissement correspondant de y :

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^m. \quad (1)$$

Nous supposons toujours, comme au § 2, que Δx est une fonction de x et de i qui s'annule quand $i = 0$, et Δy une fonction de y et de i qui s'annule aussi pour $i = 0$. Retranchant y ou son équivalent x^m des deux membres de (1), cette équation devient

$$\Delta y = (x + \Delta x)^m - x^m.$$

d'où

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^m - x^m}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^m - x^m}{(x + \Delta x) - x}. \quad (2)$$

Mais on démontre en algèbre, quand m est entier et positif, que

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1}.$$

Par conséquent (2) devient, après avoir supprimé le facteur en i commun aux deux termes du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$,

$$\frac{\Delta' y}{\Delta x} = (x + \Delta x)^{m-1} + (x + \Delta x)^{m-2} x + \ldots$$
$$+ (x + \Delta x) x^{m-2} + x^{m-1}.$$

Si nous faisons $i = 0$, d'où $\Delta x = 0$, et $\Delta' y = \delta y$, $\Delta' x = \delta x$, nous trouvons

$$\frac{\delta y}{\delta x} = x^{m-1} + x^{m-2} x + \ldots . + x . x^{m-2} + x^{m-1}.$$

Tous les termes du second membre sont égaux à x^{m-1}, et comme il y en a m, il vient

$$\frac{\delta y}{\delta x} = m x^{m-1}$$

ou

$$\frac{\delta . x^m}{\delta x} = m x^{m-1}.$$

2° Si m est entier et négatif, nous pourrons écrire,

$$y = x^{-m}$$

d'où

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^{-m}$$

et

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^{-m} - x^{-m}}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{(x+\Delta x)^m} - \frac{1}{x^m}}{\Delta x} =$$

$$\frac{x^m - (x+\Delta x)^m}{(x+\Delta x)^m . x^m . \Delta x} = - \frac{1}{(x+\Delta x)^m . x^m} . \frac{(x+\Delta x)^m - x^m}{(x+\Delta x) - x},$$

par conséquent

$$\frac{\Delta' y}{\Delta' x} = - \frac{1}{(x+\Delta x)^m . x^m} [(x+\Delta x)^{m-1} + (x+\Delta x)^{m-2} x + \ldots$$

$$+ (x+\Delta x) x^{m-2} + x^{m-1}]$$

d'où l'on déduit, en posant $i = 0$,

$$\frac{\delta y}{\delta x} = - \frac{1}{x^{2m}} [x^{m-1} + x^{m-2} x + \ldots + x . x^{m-2} + x^{m-1}] =$$

$$- \frac{m x^{m-1}}{x^{2m}} = - m . x^{-m-1}$$

ou

$$\frac{\delta . x^{-m}}{\delta x} = - m . x^{-m-1}.$$

3° Soit m fractionnaire et positif, c'est-à-dire supposons $m = \frac{p}{q}$, p et q étant des nombres entiers; il vient dans ce cas

$$y = x^{\frac{p}{q}}$$

d'où

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^{\frac{p}{q}}$$

et

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^{\frac{p}{q}} - x^{\frac{p}{q}}}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^{\frac{p}{q}} - x^{\frac{p}{q}}}{(x+\Delta x) - x}. \quad (1)$$

Posons $(x + \Delta x)^{\frac{1}{q}} = a$ et $x^{\frac{1}{q}} = b$, d'où $(x + \Delta x)^{\frac{p}{q}} = a^p$, $x^{\frac{p}{q}} = b^p$, $(x + \Delta x) = a^q$, et $x = b^q$,

Ce qui nous donne pour (1)

$$\frac{\Delta' y}{\Delta' x} = \frac{a^p - b^p}{a^q - b^q} = \frac{a^{p-1} + a^{p-2}.\, b + \ldots + a.\, b^{p-2} + b^{p-1}}{a^{q-1} + a^{q-2}.\, b + \ldots + a.\, b^{q-2} + b^{q-1}}.$$

Si nous faisons $i = 0$, d'où $\Delta x = 0$, et par conséquent

$$a = b = x^{\frac{1}{q}}$$

il vient

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{x^{\frac{p-1}{q}} + x^{\frac{p-2}{q}} x^{\frac{1}{q}} + \ldots + x^{\frac{1}{q}} x^{\frac{p-2}{q}} + x^{\frac{p-1}{q}}}{x^{\frac{q-1}{q}} + x^{\frac{q-2}{q}} x^{\frac{1}{q}} + \ldots + x^{\frac{1}{q}} x^{\frac{q-2}{q}} + x^{\frac{q-1}{q}}} =$$

$$\frac{p}{q}.\frac{x^{\frac{p-1}{q}}}{x^{\frac{q-1}{q}}} = \frac{p}{q}.\, x^{\frac{p-q}{q}} = \frac{p}{q}.\, x^{\frac{p}{q}-1},$$

d'où

$$\frac{\delta.\, x^{\frac{p}{q}}}{\delta x} = \frac{p}{q}.\, x^{\frac{p}{q}-1}.$$

4° Soit enfin m fractionnaire et négatif, c'est-à-dire $m = -\frac{p}{q}$, on a dans ce cas

$$y = x^{-\frac{p}{q}}$$

d'où

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^{-\frac{p}{q}}$$

et

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^{-\frac{p}{q}} - x^{-\frac{p}{q}}}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{(x+\Delta x)^{\frac{p}{q}}} - \frac{1}{x^{\frac{p}{q}}}}{\Delta x} =$$

$$\frac{x^{\frac{p}{q}} - (x + \Delta x)^{\frac{p}{q}}}{(x + \Delta x)^{\frac{p}{q}}.\, x^{\frac{p}{q}}.\, \Delta x} = -\frac{1}{(x + \Delta x)^{\frac{p}{q}}.\, x^{\frac{p}{q}}}.\frac{(x + \Delta x)^{\frac{p}{q}} - x^{\frac{p}{q}}}{(x + \Delta x) - x}.$$

Faisons, comme plus haut, $(x + \Delta x)^{\frac{1}{q}} = a$ et $x^{\frac{1}{q}} = b$,

d'où

$$(x + \Delta x)^{\frac{p}{q}} = a^p,\ x^{\frac{p}{q}} = b^p,\ (x + \Delta x) = a^q \text{ et } x = b^q,$$

par conséquent

$$\frac{\Delta' y}{\Delta' x} = -\frac{1}{a^p . b^p} . \frac{a^p - b^p}{a^q - b^q} =$$

$$-\frac{1}{a^p . b^p} . \left[\frac{a^{p-1} + a^{p-2} . b + \ldots + a . b^{p-2} + b^{p-1}}{a^{q-1} + a^{q-2} . b + \ldots + a . b^{q-2} + b^{q-1}}\right].$$

Si nous faisons $i = 0$, d'où $\Delta x = 0$ et $a = b = x^{\frac{1}{q}}$, il vient

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{x^{\frac{2p}{q}}} . \frac{p\, x^{\frac{p-1}{q}}}{q\, x^{\frac{q-1}{q}}} = -\frac{p}{q} . \frac{x^{\frac{p}{q} - 1}}{x^{\frac{2p}{q}}} = -\frac{p}{q} . x^{-\frac{p}{q} - 1}.$$

ou

$$\frac{\partial . x^{-\frac{p}{q}}}{\partial x} = -\frac{p}{q} . x^{-\frac{p}{q} - 1}.$$

En rapprochant les résultats obtenus dans ces quatre cas, nous voyons qu'on a toujours, quel que soit m,

$$\partial . x^m = m\, x^{m-1} . \partial x.$$

C'est précisément la formule que nous cherchions et que nous avons obtenue d'une manière plus simple au § 10.

Puisque la dérivés de x^m est trouvée, nous pourrons appliquer à cette fonction le théorème des dérivées ; c'est-à-dire que nous pourrons toujours développer la fonction $(x + \partial x)^m$ en série, d'après cette formule. Le résultat que l'on obtient dans ce cas est trop connu pour que nous nous y arrêtions plus longtemps.

Soit en second lieu à varier la fonction

$$y = \lg (x),$$

on en conclut

$$y + \Delta y = \lg (x + \Delta x)$$

d'où

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lg (x + \Delta x) - \lg (x)}{\Delta x} = \frac{\lg \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} =$$

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \lg \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdot \lg \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Mais

$$\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = 1 + \frac{x}{\Delta x} \frac{\Delta x}{x} + \frac{\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)}{2} \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 +$$

$$\frac{\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\left(\frac{x}{\Delta x} - 2\right)}{2.3} \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 + \ldots =$$

$$1 + 1 + \frac{\left(1 - \frac{\Delta x}{x}\right)}{2} + \frac{\left(1 - \frac{\Delta x}{x}\right)\left(1 - 2\frac{\Delta x}{x}\right)}{2.3} + \ldots$$

par conséquent

$$\frac{\Delta' y}{\Delta' x} = \frac{1}{x} \cdot \lg \left[1 + 1 + \frac{\left(1 - \frac{\Delta x}{x}\right)}{2} + \frac{\left(1 - \frac{\Delta x}{x}\right)\left(1 - 2\frac{\Delta x}{x}\right)}{2.3} + \ldots\right],$$

d'où l'on déduit, en faisant $i = 0$,

$$\frac{\delta . y}{\delta x} = \frac{1}{x} \lg \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots .\right).$$

Dans cette équation posons le nombre constant

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots . = e,$$

il vient

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta . \lg (x)}{\delta x} = \frac{\lg e}{x}.$$

Si nous supposons que $\lg (x)$ est pris dans le système dont la

base est e, c'est-à-dire, si nous supposons y égal au logarithme népérien de x, on trouve, à cause de $\lg e = 1$,

$$\frac{\delta.\lg(x)}{\delta x} = \frac{1}{x}.$$

Reprenons l'égalité

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lg\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lg\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}.$$

Or

$$\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = 1+\frac{1}{\Delta x}.\frac{\Delta x}{x}+\frac{\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{\Delta x}-1\right)}{2}.\frac{\overline{\Delta x}^2}{x^2}+$$

$$\frac{\frac{1}{\Delta x}\ \frac{1}{\Delta x}-1\ \left(\frac{1}{\Delta x}-2\right)}{2.3}.\frac{\overline{\Delta x}^3}{x^3}+\ldots. =$$

$$1+\frac{1}{x}+\frac{(1-\Delta x)}{2}.\frac{1}{x^2}+\frac{(1-\Delta x)(1-2\Delta x)}{2.3}.\frac{1}{x^3}+\ldots$$

par conséquent

$$\frac{\Delta' y}{\Delta' x} = \lg\left[1+\frac{1}{x}+\frac{(1-\Delta x)}{2}.\frac{1}{x^2}+\frac{(1-\Delta x)(1-2\Delta x)}{2.3}.\frac{1}{x^3}+\ldots\right].$$

Si nous posons $i = 0$, d'où $\Delta x = 0$, il vient

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta.\lg(x)}{\delta x} = \lg\left[1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2.3.x^3}+\frac{1}{2.3.4.x^4}+\ldots\right].$$

Mais nous avons obtenu plus haut

$$\frac{\delta.\lg(x)}{\delta x} = \frac{\lg e}{x},$$

donc

$$\frac{\lg(e)}{x} = \lg\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2.x^2}+\frac{1}{2.3.x^3}+\ldots.\right).$$

En passant aux nombres et désignant par a la base du système de logarithme, on trouve

$$a^{\frac{\lg e}{x}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.x^2} + \frac{1}{2.3.x^3} + \ldots$$

Faisons dans cette formule $x = \frac{\lg(e)}{x'}$, nous trouvons dans ce cas,

$$a^{x'} = 1 + \frac{x'}{\lg(e)} + \frac{x'^2}{2.\lg^2(e)} + \frac{x'^3}{2.3.\lg^3(e)} + \ldots \quad (1)$$

Pour passer d'un système de logarithme dans un autre, on a en général la formule

$$\lg(b) = \frac{l'(b)}{l'(a)},$$

il vient donc

$$\lg e = \frac{l' e}{l' a},$$

et si l'on veut passer au système népérien, $l'e = 1$, d'où

$$\lg(e) = \frac{1}{l' a},$$

en substituant dans (1), et supprimant les accents, on trouve,

$$a^x = 1 + x \lg(a) + \frac{x^2 \lg^2(a)}{2} + \frac{x^3 \lg^3(a)}{2.3} + \ldots \quad (a)$$

les logarithmes étant pris dans le système népérien. Dans tout autre système on aurait

$$a^x = 1 + \frac{x \lg(a)}{\lg(e)} + \frac{x^2 \lg^2(a)}{2.\lg^2(a)} + \frac{x^3.\lg^3(a)}{2.3.\lg^3(a)} + \ldots$$

Cela posé, cherchons la variation de la fonction

$$y = a^x,$$

d'où

$$y + \Delta y = a^{x + \Delta x}$$

et

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \, \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Mais d'après la formule (a)

$$a^{\Delta x} = 1 + \Delta x \lg (a) + \frac{\overline{\Delta x}^2 \lg^2 (a)}{2} + \frac{\overline{\Delta x}^3 . \lg^3 (a)}{2.3} + \ldots$$

on trouve par conséquent

$$\frac{\Delta' y}{\Delta' x} = a^x . \left[\lg (a) + \frac{\Delta x \lg^2 (a)}{2} + \frac{\overline{\Delta x}^2 . \lg^3 (a)}{2.3} + \ldots\right].$$

on en conclut, en faisant $i = 0$,

$$\frac{\delta y}{\delta x} = a^x \lg (a)$$

le logarithme étant pris dans le système népérien. Dans tout autre système on aurait

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{a^x \lg (a)}{\lg e},$$

dans le système népérien on aurait aussi

$$\frac{\delta . e^x}{\delta x} = e^x.$$

C'est la seule fonction qui soit égale à sa dérivée première.

Soit encore à varier la fonction

$$y = \sin x$$

qui devient

$$y + \Delta y = \sin (x + \Delta x)$$

d'où l'on tire

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin (x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

Mais, en trigonométrie, on démontre la formule

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2},$$

par conséquent

$$\frac{\Delta' y}{\Delta' x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} . \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} . \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Mais on démontre également, que

$$\left[\frac{\sin x}{x}\right]_0 = 1;$$

il vient donc en faisant $i = 0$,

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \cos x$$

ou

$$\frac{\delta . \sin x}{\delta x} = \cos x.$$

Soit encore

$$y = \cos x$$

d'où

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos (x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x},$$

mais

$$\cos p - \cos q = - 2 \sin \frac{p - q}{2} \sin \frac{p + q}{2},$$

donc

$$\frac{\Delta' y}{\Delta' x} = - \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} . \sin \left[x + \frac{\Delta x}{2}\right]}{\Delta x} = - \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} . \sin \left[x + \frac{\Delta x}{2}\right].$$

A cause de $\left[\frac{\sin x}{x}\right]_0 = 1$, on trouve en faisant $i = 0$,

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta . \cos x}{\delta x} = - \sin x,$$

d'où l'on déduit aisément la variation de toutes les autres fonctions trigonométriques. On voit d'après cela que l'on peut obtenir

toutes les variations des fonctions simples sans le secours de la théorie des coefficients à déterminer. Mais je ne puis concevoir la répugnance qu'éprouvent certains esprits à admettre les conséquences de cette théorie. Car, on ne peut nier ce principe de mathématiques qu'une hypothèse est juste quand, par des *raisonnements exacts,* on en déduit des résultats qui se vérifient rigoureusement dans tous les cas. Si une hypothèse est fausse, on est conduit à une absurdité manifeste quand on y applique des raisonnements reconnus judicieux. Cette propriété constitue l'un des plus beaux caractères de l'analyse algébrique, et nous prouve que la vérité ne peut jamais conduire à l'erreur. On peut être conduit à des conséquences fausses de deux manières : premièrement, en raisonnant juste sur une hypothèse fausse ; en second lieu, en raisonnant mal sur une hypothèse exacte. Dans toute discussion il importe donc de bien distinguer ce qui est erreur d'hypothèse de ce qui est erreur de raisonnement. On comprend aussi que dans certains cas une erreur d'hypothèse peut être corrigée par une erreur de raisonnement, et conduire ainsi à des conséquences exactes ; c'est ce qui est arrivé en partie dans le calcul différentiel.

NOTE II.

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE $\varphi(x + \delta x)$, SUIVANT LES PUISSANCES ASCENDANTES DE x.

Les transformations des § 28 et 29 nous ont conduit à la formule des dérivées qui donne le développement en série de la fonction $\varphi(x + \delta x)$ suivant les puissances ascendantes de δx. Nous allons nous appuyer sur des transformations analogues pour obtenir une formule qui nous donnera le développement en série de cette même fonction suivant les puissances ascendantes de x.

Remarquons d'abord que δx n'est pas nul quand $x = 0$. Or, quand $x = 0$ la fonction $\varphi(x + \delta x)$ devient $\varphi(\delta x)$; et comme les termes en x s'annulent seuls dans ce cas, il faut que l'ensemble

des termes indépendants de x dans $\varphi(x + \delta x)$ soit égal à $\varphi(\delta x)$. Si nous divisons par x l'ensemble des termes qui dépendent de cette variable, et que nous représentions par $\varphi_{,}(x, \delta x)$ le quotient de cette division, il vient

$$\varphi(x + \delta x) = \varphi(\delta x) + \varphi_{,}(x, \delta x).\ x.$$

Mais en général $\varphi_{,}(x, \delta x)$ se composera de termes en δx seul et de termes en x. Représentant par $F(\delta x)$ l'ensemble des premiers, et par $\varphi_{2}(x, \delta x)$, le quotient de la division de l'ensemble des seconds par x, nous trouvons,

$$\varphi(x + \delta x) = \varphi(\delta x) + F(\delta x).\ x + \varphi_{2}(x, \delta x).\ x^2.$$

De même $\varphi_{2}(x, \delta x)$ se composera de termes indépendants de x, dont nous représentons l'ensemble par $F_{,}(\delta x)$, et de termes dépendants de cette variable, en désignant par $\varphi_{3}(x, \delta x)$ le quotient de l'ensemble de ces derniers par x, il vient

$$\varphi(x + \delta x) = \varphi(\delta x) + F(\delta x).\ x + F_{,}(\delta x).\ x^2 + \varphi_{3}(x, \delta x)\ x^3,$$

et en continuant ainsi, on arrive à l'égalité

$$\varphi(x + \delta x) =$$

$$\varphi(\delta x) + F(\delta x).\ x + F_{,}(\delta x).\ x^2 + F_{2}(\delta x).\ x^3 + \ldots. \quad (1)$$

Reste à déterminer la relation qui existe entre les fonctions $F(\delta x)$, $F_{,}(\delta x)$, $F_{2}(\delta x)$, ... et la fonction principale $\varphi(\delta x)$.

Or, si nous varions les deux membres de cette équation par rapport à x, en remarquant que $\varphi(x + \delta x)$, $\varphi(\delta x)$ $F(\delta x)$, ... sont des fonctions de fonctions de x, il vient

$$\varphi'(x + \delta x).\ \delta'(x + \delta x) =$$

$$\varphi'(\delta x).\ \delta'\delta x + F(\delta x).\ \delta' x \quad + 2.\ F_{,}(\delta x)\ x\ \delta' x \quad + \ldots$$

$$+ F'(\delta x)\ x\ \delta'\delta x + \quad F_{,}'(\delta x)\ x^2\ \delta'\delta x + \ldots$$

Si nous remarquons que la fonction $\varphi'(x + \delta x)$ est analogue à la fonction $\varphi(x + \delta x)$, qui nous a conduit à l'équation (1), nous

trouverons, en appliquant à cette fonction les mêmes raisonnements qu'à $\varphi(x+\delta x)$,

$$\varphi'(x+\delta x) = \varphi'(\delta x) + f(\delta x).\, x + f_{,}(\delta x).\, x^2 + f_{2}(\delta x).\, x^3 + \ldots$$

En mettant au lieu de $\varphi'(x+\delta x)$, cette valeur dans (2), et remarquant que $\delta'(x+\delta x) = \delta' x + \delta'\delta x$, on trouve

$$\left.\begin{array}{l} \varphi'(\delta x)\,\delta' x + f(\delta x)\, x\,\delta' x + f_{,}(\delta x)\, x^2\,\delta' x + \ldots. \\ \varphi'(\delta x)\,\delta'\delta x + f(\delta x)\, x\,\delta'\delta x + f_{,}(\delta x)\, x^2\,\delta'\delta x + \ldots. \end{array}\right\} =$$

$$\varphi'(\delta x).\,\delta'\delta x + \mathrm{F}(\delta x)\,\delta' x + 2\,\mathrm{F}_{,}(\delta x)\; x\;\delta' x + 3\,\mathrm{F}_{2}(\delta x)\, x^2\,\delta' x + \ldots$$

$$+ \mathrm{F}'(\delta x)\, x.\,\delta'\delta x + \mathrm{F}_{,}'(\delta x)\, x^2.\,\delta'\delta x + \mathrm{F}_{2}'(\delta x)\, x^3\,\delta'\delta x + \ldots$$

Cette égalité doit être satisfaite pour toutes les valeurs de x; on en déduit donc, par un raisonnement bien connu,

$$\varphi'(\delta x) = \varphi'(\delta x)$$

$$\mathrm{F}(\delta x) = \varphi'(\delta x)$$

$$\mathrm{F}'(\delta x) = f(\delta x)$$

$$2\,\mathrm{F}_{,}(\delta x) = f(\delta x)\;.$$

$$\mathrm{F}_{,}'(\delta x) = f_{,}(\delta x)$$

$$3\,\mathrm{F}_{2}(\delta x) = f_{,}(\delta x)$$

. . . .

par conséquent

$$\mathrm{F}(\delta x) = \varphi'(\delta x)$$

$$\mathrm{F}_{,}(\delta x) = \frac{1}{2}.\;\frac{\delta'.\,\varphi'(\delta x)}{\delta'\delta x} = \frac{\varphi''(\delta x)}{2}$$

$$\mathrm{F}_{2}(\delta x) = \frac{1}{3}.\;\frac{\delta'.\,\dfrac{\varphi''(\delta x)}{2}}{\delta'\delta x} = \frac{\varphi'''(\delta x)}{2.3}$$

$$\mathrm{F}_{3}(\delta x) = \frac{1}{4}.\;\frac{\delta'.\,\dfrac{\varphi'''(\delta x)}{2.3}}{\delta'\,\delta x} = \frac{\varphi^{\mathrm{iv}}(\delta x)}{2.3.4}$$

. . . .

En substituant ces valeurs dans (1), cette équation devient

$$\varphi(x+\delta x)=\varphi(\delta x)+\varphi'(\delta x).\,x+\varphi''(\delta x).\,\frac{x^2}{2}+\varphi'''(\delta x)\,\frac{x^3}{2.3}+\ldots$$

formule qui renferme celle de Mac-Lausin comme cas particulier. En effet, si nous y faisons $\delta x = 0$, il vient

$$\varphi(x)=\varphi(0)+\varphi'(0)\,x+\varphi''(0)\,\frac{x^2}{2}+\varphi'''(0)\,\frac{x^3}{2.3}+\ldots.$$

Ce résultat était d'ailleurs facile à prévoir, puisque x et δx entrent de la même manière dans $\delta(x+\delta x)$.

NOTE III.

NOUVELLE PREUVE DE LA PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DE LA DÉRIVÉE.

Nous avons dit et prouvé que la dérivée marque la rapidité avec laquelle croîtrait une fonction, quand on donne un accroissement quelconque à la variable, si le mode d'accroissement devenait uniforme et restait le même que sous la valeur de la variable que l'on considère. Nous avons expliqué ce que l'on doit entendre par rapidité d'accroissement sous une valeur déterminée de la variable. Il ne sera peut-être pas inutile de donner une preuve analytique de ce que nous venons de dire.

Soit $y=\varphi(x)$; donnons à x l'accroissement δx et représentons par a l'accroissement correspondant de y ; il en résulte l'égalité

$$y+a=\varphi(x+\delta x). \qquad (1)$$

Mais par le théorème des dérivées nous avons prouvé que

$$\varphi(x+\delta x)=\varphi(x)+\varphi'(x).\,\delta x+\varphi''(x)\,\frac{\overline{\delta x}^2}{2}+\ldots.;$$

en substituant cette valeur dans (1), il vient

$$y + a = \varphi(x) + \varphi'(x).\ \delta x + \varphi''(x)\frac{\overline{\delta x}^2}{2} + \ldots.$$

ou

$$a = \varphi'(x)\ \delta x + \varphi''(x)\frac{\overline{\delta x}^2}{2} + \varphi'''(x)\frac{\overline{\delta x}^3}{2.3} + \ldots$$

Telle est l'expression de l'accroissement que reçoit $\varphi(x)$, quand x augmente de δx.

Mais aussi longtemps que $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)$ .... conserveront une valeur, le mode d'accroissement ne sera pas uniforme, c'est-à-dire que la fonction ne croîtra pas proportionnellement à δx. Pour que cela arrivât, il faudrait $\varphi''(x) = 0$, $\varphi'''(x) = 0$ .... Alors l'accroissement de la fonction, exprimé par $\varphi'(x)\ \delta x$, deviendrait uniforme. Il s'ensuit que $\varphi'(x)\ \delta x$ exprime l'accroissement que prendrait la fonction, si le mode en devenait uniforme et restait le même que sous la valeur x. Or, quand x est déterminé, $\varphi'(x)$ l'est aussi, par conséquent l'accroissement ne varie qu'avec δx et proportionnellement à cette quantité. En d'autres termes, $\varphi'(x)$ indique la rapidité avec laquelle croîtrait la fonction d'une manière uniforme quand on donne un accroissement à x.

Nous avons dit et répété plusieurs fois que les propriétés du coefficient différentiel étaient connues avant le calcul qui lui a donné cette dénomination. Il peut être curieux de voir comment on a procédé pour inventer ce calcul, c'est-à-dire de voir quel en est l'esprit.

Nous disons donc que les principales propriétés du coefficient différentiel étaient connues. D'un autre côté on voyait constamment paraître cette quantité dans le second terme du développement en série de $\varphi(x + dx)$. On s'est donc attaché à dégager ce terme de tous les autres qui gênaient singulièrement les analystes. Voici comme on s'y prit : il était facile de faire disparaître le premier terme en désignant l'accroissement de la fonction par dy, ce qui donnait

$$dy = \varphi'(x).\ dx + \varphi''(x).\ \frac{\overline{dx}^2}{2} + \ldots$$

Mais comment faire pour se débarrasser des autres termes? Oh!

rien de plus simple, c'est de n'y pas faire attention, et de dire que *dx* est une quantité de nature telle que les puissances supérieures doivent se négliger devant la première. Tout allait bien jusque-là, mais il fallait déterminer la nature de cette quantité. Or, les analystes remarquèrent, qu'en supposant *dx* une fraction, plus le dénominateur en devenait grand, plus l'accroissement de la fonction tendait à se réduire à son premier terme; ils se sont donc dit, poussons cette hypothèse jusqu'à toute extrémité et supposons le dénominateur ∞, alors ce qui tantôt n'était qu'une approximation devient une vérité vérifiée. Oui, le fait est incontestable; mais juste au moment où leur hypothèse devient vraie, la quantité sur laquelle ils la font s'anéantit, puisque $\frac{1}{\infty} = 0$. De sorte que, au lieu de prouver la possibilité de l'existence d'une quantité telle qu'ils l'avaient définie, les analystes en prouvèrent l'impossibilité. Mais il y avait de leur part parti pris; de sorte qu'ils maintinrent l'hypothèse, tout absurde qu'elle fût. De là ce cortége d'idées incompréhensibles, reléguées dans les régions métaphysiques qui fatiguent tout l'esprit dans l'étude du calcul différentiel.

FIN.

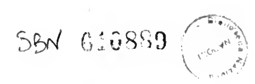

SBN 610889

TABLE DES MATIÈRES.

NOTES.

Digitized by Google

ERRATA.

Page 5,	ligne 7,	*au lieu de*	tous ces	*lisez*	tous les
» 15	» 10	»	$\frac{\delta y}{2\sqrt{x}}$	»	$\frac{\delta x}{2\sqrt{x}}$
» 56	» 13	»	maximis et les minimis	»	maxima et les minima
» 114	» 13	»	en deux corps	»	en deux camps
» 116	» 16	»	δx	»	dx
» 132	» 20	»	$\varphi\ \delta x$	»	$\gamma .\ \delta x$
» 162	» 16	»	$\varphi' t$	»	$\delta' t$

Digitized by Google

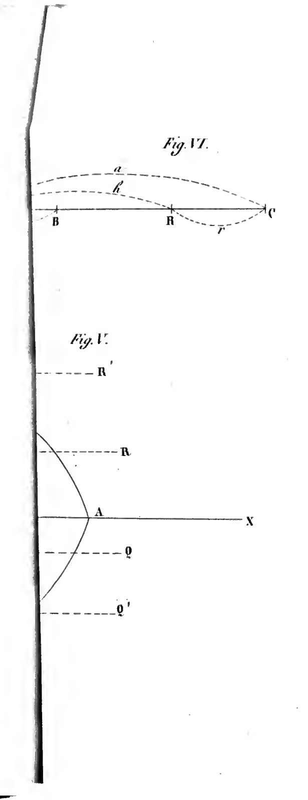
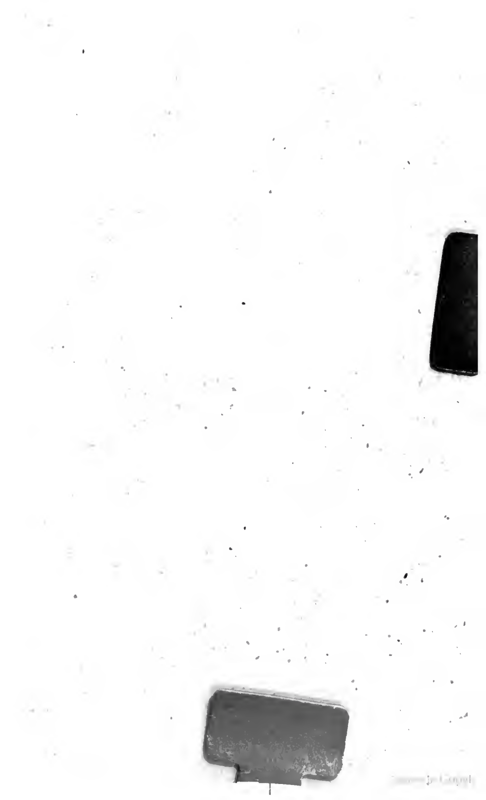


Fig. VI.
a
b
B
R
C
r
Fig. V.
R'
R
A
X
Q
Q'

Digitized by Google



Digitized by Google

